Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

Ayın Sorusu

Eylül 2005

Soru: $0 \leq x_1, x_2, \ldots, x_{10} \leq \frac{\pi}{2}$ ve $\sin^2 x_1 + \sin^2 x_2 + \cdots + \sin^2 x_{10} = 1$ ise,

$$\frac{\cos x_1 + \cos x_2 + \cdots + \cos x_{10}}{\sin x_1 + \sin x_2 + \cdots + \sin x_{10}} \geq 3$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Paydadaki ifade olan $\sin x_1 + \sin x_2 + \cdots + \sin x_{10}$ toplamını A ile gösterelim.

$$\frac{\cos x_i}{3} = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 x_i}}{3} = \sqrt{\frac{\sin^2 x_1 + \cdots + \sin^2 x_{i-1} + \sin^2 x_{i+1} + \cdots \sin^2 x_{10}}{9}}$$

olduğundan, karesel ortalama – aritmetik ortalama eşitsizliğini kullanarak,

$$\frac{\cos x_i}{3} \geq \frac{\sin x_1 + \cdots + \sin x_{i-1} + \sin x_{i+1} + \cdots \sin x_{10}}{9} = \frac{A - \sin x_i}{9}$$

elde ederiz. Elde ettiğimiz bu eşitsizlikleri

$$3 \cos x_i \geq A - \sin x_i \qquad i = 1, \ldots, 10,$$

toplayarak

$$\begin{aligned} 3(\cos x_1 + \cos x_2 + \cdots \cos x_{10}) &\geq 10A - \sin x_1 - \sin x_2 - \cdots - \sin x_{10} \\ &= 9(\sin x_1 + \sin x_2 + \cdots + \sin x_{10}) \end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece istenilen gösterilmiş olur.