Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

Ayın Sorusu

Haziran 2005

Soru: Herhangi bir $\triangle ABC$ üçgeni için

$$|AB|\cos(B\widehat{C}A)+|BC|\cos(B\widehat{A}C)+|AC|\cos(A\widehat{B}C)\leq \frac{|AB|+|BC|+|AC|}{2}$$

olduğunu ispatlayınız.

Çözüm:
$|AB|=c, |BC|=a, |AC|=b, \widehat{BAC}=\widehat{A}, \widehat{ABC}=\widehat{B}$, ve $\widehat{BCA}=\widehat{C}$ olsun. Şimdi şunu göstermeye çalışalım $a\cos\widehat{A}+b\cos\widehat{B}\leq c$. Aslında, $c=a\cos\widehat{B}+b\cos\widehat{A}$ olduğundan, eşitsizliğimiz, şu eşitsizliğe denktir

$$(a-b)(\cos\widehat{A}-\cos\widehat{B})\leq 0.$$

Son eşitsilik, $\cos x$ fonksiyonu $[0,\pi]$ aralığında azalan bir fonksiyon olduğu için doğrudur ve eğer $a\geq b$ ise $\cos\widehat{A}\geq\cos\widehat{B}$ doğrudur. Aynı şekilde

$$a\cos\widehat{A}+c\cos\widehat{C}\leq b \quad \text{ve} \quad b\cos\widehat{B}+c\cos\widehat{C}\leq a$$

olduğunu gösteririz. Bu eşitsizliklerin toplamı da istenilen eşitsizliği verir.