



Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

AYIN SORUSU

Mayıs 2005

Soru:

$$(a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3 = 60$$

eşitliğini sağlayan a, b ve c tamsayıları için $|a - b| + |b - c| + |c - a|$ ifadesinin minimum ve maksimum değerlerini bulunuz.

Çözüm:

$$(a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3 = 3(a - b)(b - c)(c - a).$$

olduğundan, $(a - b)(b - c)(c - a) = 20$ olmalıdır. $a - b = x, b - c = y, c - a = z$ yazarsak, iki denklemden oluşan bir sistem elde ederiz:

$$\begin{cases} xyz = 20 \\ x + y + z = 0. \end{cases}$$

Bu sistemin tamsayı çözümleri $(5, -4, -1), (-5, 4, 1)$ ve bunların permutasyonlarıdır. Öyleyse, $|a - b| + |b - c| + |c - a|$ ifadesi sabittir ve minimum ve maksimum değerleri 10'dur.