



Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

AYIN SORUSU

Mayıs 2026

Soru:

$i = 1, 2, \dots, 2026$ olmak üzere, $0 \leq x_i \leq 1$ gerçel sayıları

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{2026} = T$$

koşulunu sağlıyor. T gerçel sayısının en büyük hangi değerinde bu sayıların birinin toplamı en fazla 6 ve diğerinin toplamı en fazla 12 olan iki gruba ayrılması garantilenebilir?

Çözüm:

Cevap: $\frac{120}{7}$.

İlk önce $T \leq \frac{120}{7}$ olduğunu gösterelim. $t > 0$ olmak üzere, $T = \frac{120}{7} + t = \frac{6 \cdot 20}{7} + t$, $x_1 = x_2 = \dots = x_{20} = \frac{T}{20} = \frac{6}{7} + \frac{t}{20}$ ve $x_{21} = x_{22} = \dots = x_{2026} = 0$ olsun. Bu durumda birinci gruba sıfırdan farklı olan en fazla 6 ve ikinci gruba sıfırdan farklı olan en fazla 13 terim dahil edilebilir. Buna göre, $T \leq \frac{120}{7}$ olmak zorundadır.

Şimdi de $T = \frac{115}{6}$ sayısının koşulları sağladığını gösterelim. Birinci grubun elemanlarının toplamını τ ile gösterelim. Birinci gruba sıfıra eşit olan tüm terimleri dahil edelim ve grubu τ sayısı 6 sayısını aşmayan mümkün olan en büyük sayı olacak şekilde kuralım. $\tau \geq 6 - \frac{6}{7}$ durumunda kalan terimlerin toplamı en fazla $\frac{120}{7} - (6 - \frac{6}{7}) = 12$ olduğundan tüm kalan terimleri ikinci gruba dahil edebiliriz. Aksi taktirde birinci gruptaki terimlerin toplamı $6 - \frac{6}{7}$ dan küçük olup kalan terimlerin her biri $\frac{6}{7}$ dan büyüktür. Birinci grup dışındaki elemanların toplamı en az $\frac{120}{7} - \tau > 12$ olduğundan burada en az 12 terim vardır. Bu terimlerin herhangi altısının toplamı $6 \cdot \frac{6}{7}$ sayısından büyüktür, bu da $\tau < 6 - \frac{6}{7}$ eşitsizliğiyle geliyor.