



Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

AYIN SORUSU

Nisan 2026

Soru:

Aslı ve Zehra, 2026 satır ve 9 sütundan oluşan bir satranç tahtası üzerinde bir oyun oynuyorlar. Başlangıçta Aslı tahtanın her birim karesine her satırdaki sayılar birbirinden farklı olacak şekilde birer tam sayı yazıyor. Bundan sonra Aslı ve Zehra sırayla hamle yapıyorlar, ilk hamleyi Zehra yapıyor. Zehra her hamlesinde daha önce seçilmemiş bir sayı seçiyor ve bu sayının yazılı olduğu tüm birim kareleri kırmızı renge boyuyor. Aslı her hamlesinde daha önce seçilmemiş bir sayı seçiyor ve bu sayının yazılı olduğu tüm birim kareleri mavi renge boyuyor. Aslı, tahtadaki tüm birim kareler boyandıktan sonra sadece mavi birim karelerden oluşan N satır bulunmasını garantileyebiliyorsa, N sayısının alabileceği en büyük değeri bulunuz.

Çözüm:

Cevap: 3.

Aslı'nın tüm birim kareler boyandıktan sonra sadece mavi birim karelerden oluşan en az 3 satır bulunmasını garantileyebileceğini gösterelim. Tahtanın sütunlarını soldan sağa doğru $1, 2, \dots, 9$ sayılarıyla numaralandıralım. Aslı birinci sütunu en üst birim kareden başlayarak 1013 ve 1013 boyutlarında olan $B(1, 1)$ ve $B(1, 2)$ bloklarına ayırıyor. Bu bloklar sırasıyla en üst birim kareden başlayarak ilk 1013 ve daha sonraki 1013 birim kareden oluşuyor. Aslı benzer şekilde en üst birim kareden başlayarak ikinci sütunu $[1013/2]$, $[1013/2] + 1$, $[1013/2]$, $[1013/2] + 1$ boyutlarında olan $B(1, 1, 1)$, $B(1, 1, 2)$, $B(1, 2, 1)$, $B(1, 2, 2)$ bloklarına ayırıyor. Aslı benzer şekilde en üst birim kareden başlayarak üçüncü sütunu 506, 507, 506, 507, 506, 507, 506, 507 boyutlarında olan $B(1, 1, 1, 1)$, $B(1, 1, 1, 2)$, $B(1, 1, 2, 1)$, $B(1, 1, 2, 2)$, $B(1, 2, 1, 1)$, $B(1, 2, 1, 2)$, $B(1, 2, 2, 1)$, $B(1, 2, 2, 2)$ bloklarına ayırıyor. Aslı benzer şekilde dördüncü sütunu 16, beşinci sütunu 32, altıncı sütunu 64, yedinci sütunu 128, sekizinci sütunu 256 bloka ayırıyor. Aslı son olarak dokuzuncu sütunu 3 ve 4 boyutlarında olan 512 bloka ayırıyor. Aslı herhangi iki farklı blokta bulunan birim karelere farklı, fakat aynı blokta bulunan birim karelere aynı sayı yazıyor. $B(1, 1)$ ve $B(1, 2)$ bloklarına yazılı sayılara eş sayı diyelim. Benzer şekilde $B(a, b, c, \dots, d, 1)$ ve $B(a, b, c, \dots, d, 2)$ bloklarına yazılı sayılara eş sayı diyelim. Aslı her hamlesinde Zehra'nın son hamlesinde seçtiği sayının eşini sayıyı seçerse tüm birim kareler boyandıktan sonra sadece mavi birim karelerden oluşan en az 3 satır bulunmasını garantileyecektir.

Şimdi de Zehra'nın tüm birim kareler boyandıktan sonra sadece mavi birim karelerden oluşan en fazla 3 satır bulunmasını garantileyebileceğini gösterelim. k birim karesi mavi olan ve herhangi birim karesi kırmızı renkte olmayan satırın ağırlığı 2^k olsun. En az bir birim karesi kırmızı olan satırın ağırlığı 0 olsun. Daha önce seçilmemiş her t sayısı için t sayısını içeren tüm satırların toplam ağırlığı $W(t)$ olsun. Zehra her hamlesinde t' sayısını $W(t')$ en büyük olacak şekilde seçmiş olsun. Aslı bundan sonraki hamlesinde bir s sayısını seçsin. Aslının hamlesinden sonra s sayısını içeren satırların toplam ağırlığı iki katına çıkacaktır. Fakat $W(t') \geq W(s)$ olduğundan tüm satırların toplam ağırlığı artmayacaktır. Başlangıçta tüm satırların toplam ağırlığı 2026'dır. Tüm birim kareleri mavi olan her satırın ağırlığı 2^9 sayısına eşittir. Demek ki Zehra hamlelerini bu şekilde yaparsa tüm birim kareler boyandıktan sonra sadece mavi birim karelerden oluşan satır sayısı en fazla $\lfloor \frac{2026}{2^9} \rfloor = 3$ olacaktır.