



Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

AYIN SORUSU

Mart 2026

Soru:

$n \geq 3$ bir tam sayı olmak üzere, bir düzgün n -genin her köşesine bir gerçel sayı yazılmıştır ve yazılan tüm sayıların toplamı 0'dır. Herhangi iki farklı köşe için, bu köşelerde yazan sayılar x ve y , bu iki köşeyi birleştiren doğrunun bir tarafında kalan sayıların toplamı A ve diğer tarafında kalan sayıların toplamı B olmak üzere,

$$|x - y| \geq |A - B|$$

koşulu sağlanıyorsa bu köşe ikilisine *iyi* ikili diyelim. Her n sayısı için iyi ikili sayısının alabileceği en küçük değeri bulunuz.

Çözüm:

Cevap: $n - 1$.

Sayılardan biri $n - 1$ ve kalanları -1 ise iyi ikili sayısı tam olarak $n - 1$ olur.

Şimdi de her durumda en az $n - 1$ iyi ikili bulunduğunu gösterelim. Düzgün n -genin köşeleri $v_1, v_2, \dots, v_n$ olsun, $v_{i+n} = v_i$ kabul ediyoruz. Köşelerin bir çember üzerinde oldukları varsayalım. Her $k = 1, 2, \dots, n - 1$ için k ardışık $v_i, v_{i+1}, \dots, v_{i+k-1}$ köşelerini içeren yay $L(v_i, v_{i+k-1})$ bu yay üzerindeki sayıların toplamı $S(L(v_i, v_{i+k-1}))$ olsun. Bir i indisi için $S(L(v_i, v_{i+k-1})) \geq 0$ ve $S(L(v_{i+1}, v_{i+k})) \leq 0$ olsun. (v_i, v_{i+k}) ikilisinin iyi olduğunu gösterelim. v_i ve v_{i+k} köşelerindeki sayılar sırasıyla x_i ve x_{i+k} olsun. $v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_{i+k-1}$ köşelerine yazılı sayıların toplamı A , $v_{i+k+1}, v_{i+k+2}, \dots, v_{i-1}$ köşelerine yazılı sayıların toplamı B olsun. O zaman $x_i + A \geq 0 \geq A + x_{i+k}$. Sorudaki koşula göre $x_i + A + x_{i+k} + B = 0$ olduğundan $B + x_i \geq 0 \geq x_{i+k} + B$ gelir. Buradan $x_i - x_{i+k} \geq A - B$ ve $x_i - x_{i+k} \geq B - A$ gelir. Demek ki (v_i, v_{i+k}) iyi ikilidir. Tüm sayıların toplamı 0 olduğuna göre, öyle bir j için $S(L(v_j, v_{j+k-1})) \leq 0$ ve $S(L(v_{j+1}, v_{j+k})) \geq 0$ olacaktır ve benzer şekilde (v_j, v_{j+k}) iyi ikilidir. Her iyi ikili iki kez sayılıyor. Buna göre, her $k = 1, 2, \dots, n - 1$ için en az bir iyi ikili bulunur. İspat tamamlanmıştır.