



Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

AYIN SORUSU

Aralık 2025

Soru:

En az 6 pozitif böleni olan n pozitif tam sayısının en küçük altıncı böleni $d_6(n)$ olsun. Örnek olarak $d_6(5040) = 6$.

$$d_6 = \frac{3 + \sqrt{4n + 9}}{2}.$$

olmasını sağlayan tüm n pozitif tam sayılarını bulunuz.

Çözüm:

Cevap: $n = 208$ ve $n = 304$.

$d_6 \geq 6$ olduğu açıktır. $d_6 - 3 = \frac{-3 + \sqrt{4n + 9}}{2}$ olduğundan $d_6(d_6 - 3) = n$ gelir. $d_6 - 1$ ve $d_6 - 2$ sayılarının n nin böleni olmadığını gösterelim. $d_6 - 1 \mid (d_6 - 1)^2 - (d_6 - 1) = d_6^2 - 3d_6 + 2 = n + 2$. Demek ki $d_6 - 1 \mid n$ olursa $d_6 - 1 \mid 2$, bu da $d_6 \geq 6$ ile çelişiyor. Benzer şekilde $d_6 - 2 \mid (d_6 - 2)^2 + (d_6 - 2) = d_6^2 - 3d_6 + 2 = n + 2$. Demek ki $d_6 - 2 \mid n$ olursa $d_6 - 1 \mid 2$, bu da $d_6 \geq 6$ ile çelişiyor. Sonuç olarak $d_5 = d_6 - 3$ sayısı n nin beşinci en küçük bölenidir. $d_6(d_6 - 3) = n$ olduğuna göre, n sayısının tam olarak 10 pozitif böleni vardır.

d_6 ve $d_6 - 3$ sayılarından biri çift olduğuna göre, n de çifttir. Sonuç olarak p bir tek asal sayı olmak üzere, $n = 2^9$, $n = 2p^4$ veya $n = 2^4p$ olmak zorundadır.

$n = 2^9$ sayısı koşulları sağlamıyor. $n = 2p^4$ durumunda $d_5 = p^2$ ve $d_6 = 2p^2$ olduğundan $3 = d_6 - d_5 = p^2$, çelişkisi geliyor.

$n = 2^4p$ olsun. $p = 3$ koşulları sağlamıyor: $p > 3$. $d_6(d_6 - 3) = 16p$ ve $d_6 > 1$ ve $d_6 - 3 > 1$ aralarında asal olduğundan bu sayılardan biri 16 olmak zorundadır. Buna göre, çözümler $208 = 2^4 \cdot 13$ ve $304 = 2^4 \cdot 19$ olur.