Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

Ayın Sorusu

Kasım 2025

Soru:

Bir çember üzerinde bulunan birbirinden farklı $P_1,\ P_2,\ \ldots,\ P_{1024}$ noktalarının üzerine sırasıyla birbirinden farklı $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{1024}$ gerçel sayıları yazılmıştır. Q noktası bu çember üzerinde $P_1,\ P_2,\ \ldots,\ P_{1024}$ noktalarından farklı bir nokta olmak üzere, çember üzerindeki P_iQ yaylarından en az biri için bu yayın üzerindeki en büyük sayı a_i ise, P_i noktası Q-*iyi* nokta olsun. Çember üzerindeki Q-iyi noktaların sayısı Q noktasının puanı olsun. $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{1024}$ sayıları nasıl yazılırsa yazılsın puanı en az k olan bir Q noktası bulunuyorsa k sayısının alabileceği en büyük değeri bulunuz.

Çözüm:

Her zaman puanı en az 11 olan bir Q noktasının bulunduğunu gösterelim. Genelliği bozmadan $a_1 > a_2 > \cdots > a_{1024}$ olsun. Her Q noktası için P_1 ve P_2 Q-iyi noktadır. Çemberin yayının bu yayın uç noktalarını içermediğini varsayacağız. En az 511 nokta içeren P_1P_2 yayını alalım ve bu yay üzerindeki en büyük sayı a_{i_3} olsun. O zaman bu yay üzerindeki her Q noktası için P_{i_3} noktası Q-iyidir. Bundan sonra bir önceki yayın içinde bulunan $P_{i_3}P_1$ ve $P_{i_3}P_2$ yaylarından en az 255 nokta içeren yayı alalım ve bu yay üzerindeki en büyük sayı a_{i_4} olsun. O zaman bu yay üzerindeki her Q noktası için P_{i_4} noktası Q-iyidir. Benzer şekilde devam edelim: her $k = 3, 4, \ldots, 11$ için, en az $2^{12-k}-1$ nokta içeren $P_{i_{k-1}}P_{i_{k-2}}$ veya $P_{i_{k-1}}P_{i_{k-3}}$ yaylarından biri üzerindeki en büyük sayı a_{i_k} olmak üzere, bu yay üzerindeki her Q noktası için P_{i_k} noktası Q-iyi olacaktır. Sonuç olarak bir Q noktası için en az 11 tane Q-iyi nokta bulunacaktır.

Şimdi de her noktanın puanı en fazla 11 olan bir örnek verelim. $P_1,\ P_2,\ \ldots,\ P_{1024}$ noktaları köşeleri bu çember üzerinde bulunan bir düzgün 1024-gin köşeleri olsun. Bu köşelere $1, 2, \ldots, 1024$ sayılarını yazacağız. Birinci adımda çemberin bir çapı üzerinde bulunan iki köşeye 1023 ve 1024 sayılarını yazalım. İkinci adımda bu iki köşenin tanımladığı iki yayın orta noktalarına 1022 ve 1021 sayılarını yazalım. Üçüncü adımda yeni oluşan dört yayın orta noktalarına 1020, 1019, 1018 ve 1017 sayılarını yerleştirelim. Benzer şekilde $k = 4, 5, \ldots, 10$ olmak üzere, k numaralı adımda $1, 2, \ldots, 1024$ sayılarından daha önce kullanılmamış en büyük 2^{k-1} sayıyı $k-1$ numaralı adımda oluşan 2^{k-1} yeni yayın orta noktalarında yazalım. Her adım sonucunda her noktanın puanı tam olarak 1 artıyor. Buna göre, 10 adım sonucunda her noktanın puanı 11 olacaktır.