



Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

AYIN SORUSU

Ekim 2025

Soru:

Her n pozitif tam sayısı için $f : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ fonksiyonu, $f(1) = 0$ ve $n > 1$ için n sayısının asal çarpanlara ayrımı $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ olmak üzere, $f(n) = \alpha_1 + \dots + \alpha_k$ olarak tanımlanıyor. Pozitif tam sayılardan oluşan bir $X = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ sonsuz aritmetik dizisi ve bir $a > 1$ pozitif tam sayısı için $\{f(a^{x_i} - 1)\}_{i=1}^{\infty}$ dizisi de bir aritmetik dizi oluşturuyorsa, X dizisine *iyi* dizi diyelim. Tüm iyi dizileri bulunuz.

Çözüm:

Her sabit dizi koşulları sağlıyor. $x_n = a + bn$ koşulları sağlayan ve sabit olmayan bir dizi olmak üzere, $d = (a, b)$ olsun. Her $m, n \in \mathbb{Z}^+$ için, $\gamma(mn) = \gamma(m) + \gamma(n)$ olduğu açıktır.

$y_i = \frac{a^{x_i} - 1}{a^d - 1}$ olarak tanımlayalım. O zaman $\gamma(y_i) = \gamma(a^{x_i} - 1) - \gamma(a^d - 1)$ ve dolayısıyla $\{\gamma(y_i)\}_{i=1}^{\infty}$ dizisi de bir aritmetik dizidir. Dirichlet Theoremine göre, sonsuz tane n için $\frac{a + bn}{d} = p$ bir asal sayıdır.

$\frac{t^p - 1}{t - 1}$ sayısının her asal böleninin ya p ya da p modunda 1 olduğu biliniyor. Buna göre her asal bölen en az p dir. $t = a^d$ olsun. O zaman tüm yeterince büyük p asal sayıları için öyle n sayısı var ki, y_n nin tüm asal bölenleri p den büyüktür. Diğer taraftan $\gamma(a^{x_i}) = \gamma(a)x_i$ dizisi de bir aritmetik dizidir. a sayısının en büyük asal böleni q ve N yeterince büyük sayı olsun. Her $p > q^N$ asal sayısını alırsak $\frac{\gamma(a^{x_n})}{\gamma(y_n)} > N$ olacak şekilde sonsuz tane n sayısı buluruz. Fakat iki sabit olmayan aritmetik dizi için bu doğru olamaz. Demek ki bu dizilerden en az biri sabit dizidir.

$\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ sabit olamayacağını gösterelim. $x_i = a + bi$ ise dizide $(b+1)x_i$ terimi de bulunuyor ve

$$\frac{a^{x_i} - 1}{a^d - 1} \mid \frac{a^{(b+1)x_i} - 1}{a^d - 1}.$$

ve $b \neq 0$ ise ikinci terim birinci terimden büyüktür. Buna göre, $x_j = (b+1)x_i$ için $y_j > y_i$ olur. Sonuç olarak $\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ sabit dizi değildir. Demek ki $X = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ dizisi sabit dizidir.