



Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

AYIN SORUSU

Eylül 2025

Soru:

p bir asal sayı ve $n < p$ bir pozitif tam sayı olmak üzere, $pn(p+1)(n+1)+1$ sayısını tam kare yapan tüm (p, n) ikililerini bulunuz.

Çözüm: Cevap: $p > 2$ olmak üzere $(p, n) = (p, p-2)$.

$pn(p+1)(n+1)+1 = m^2$ olsun. $n \neq p$ olduğundan $m > np$ olur. $m = np + k$ yazarsak

$$pn(p+1)(n+1)+1 = (pn+k)^2 = pn(pn+2k)+k^2$$

ve sadeleştirirsek

$$pn(p+n+1-2k) = k^2 - 1 \quad (\dagger)$$

gelir. $k \neq 1$, aksi takdirde $p+n=1$ olur. Buna göre, $k > 1$ ve $2k < p+n+1 \leq 2p$ olur. Buradan $k < p$ elde edilir. $p|k^2-1 = (k-1)(k+1)$ olduğundan $p = k+1$ gelir. Bunu $(\dagger)$ eşitliğine yazarsak $n(n-p+3) = p-2$ elde edilir. İkinci dereceden bu denklemin iki kökü var: $n = -1$ ve $n = p-2$. Demek ki tek seçenek $n = p-2$ dir. $n = p-2$ durumunda koşullar sağlanıyor:

$$pn(p+1)(n+1)+1 = (p^2 - (p+1)^2)^2.$$