



Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

AYIN SORUSU

Temmuz-Ağustos 2025

Soru:

Herhangi ikisi aralarında asal olan ve $a > bc$ koşulunu sağlayan a, b, c pozitif tam sayıları verilmiştir. $m < n$ pozitif tam sayılar olmak üzere, a, b veya c birim ağırlığında taşlardan oluşan ve toplam ağırlığı n birim olan herhangi bir öbekten bir veya birkaç taş çıkarılarak ağırlığı m birim olan bir öbek elde edilebiliyorsa, m sayısına n sayısının bir *halefi* diyelim. Hiç halefi olmayan en büyük pozitif tam sayıyı belirleyiniz.

Çözüm: Cevap: abc .

İlk önce abc sayısının halefi olmadığını gösterelim. abc sayısının halefi m olsun. Her biri a birim ağırlığında olan ve bc tane taştan oluşan bir öbek alırsak m sayısının a nın bir katı olduğunu görürüz. Benzer şekilde m sayısı hem b hem de c sayısının katıdır. a, b ve c sayıları aralarında asal olduğuna göre, m sayısı abc nin bir katıdır ve bu da $m < abc$ ile çelişiyor.

Şimdi de her $n > abc$ sayısının bir halefi olduğunu gösterelim. $0 \leq r < a$ olmak üzere, $n = aq + r$ olsun. Çinli kalan teoremine göre,

$$m \equiv r \pmod{a}$$

$$m \equiv 0 \pmod{b}$$

$$m \equiv 0 \pmod{c}$$

denklem sisteminin bir $m \in \{1, 2, \dots, abc\}$ çözümü bulunuyor. $m = ak + r = bcl$ olsun. $n = ax + by + cz$ olmak üzere, her biri a birim ağırlığında olan ve x tane taştan oluşan, her biri b birim ağırlığında olan ve y tane taştan oluşan ve her biri c birim ağırlığında olan ve z tane taştan oluşan üç öbek alalım. O zaman $by + cz = as + r$ olacak şekilde negatif olmayan bir s sayısı bulunur.

Durum 1: $s \leq k$ olsun. O zaman $x + s = q$ ve $s \leq k \leq bc \leq q = x + s$. Her biri a birim ağırlığında olan $x - k + s$ tane taş alırsak m birim ağırlığında bir öbek elde ederiz.

Durum 2: $s > k$ olsun. $y = cy_1 + y_2$, $0 \leq y_2 < c$ ve $c = bz_1 + z_2$, $0 \leq z_2 < b$ olsun. O zaman

$$by + cz = bc(y_1 + z_1) + by_2 + cz_2 < bc(y_1 + z_1 + 2)$$

ve

$$bc(l + 1) = bcl + bc < ak + r + a \leq as + r = by + cz,$$

olduğundan $l + 1 < y_1 + z_1 + 2$ elde edilir. Buna göre $l \leq y_1 + z_1$. O zaman öbekte her biri b birim ağırlıklı cy_1 taş ve her biri c birim ağırlıklı $b(l - y_1)$ taş tutup kalan taşları atarsak m birim ağırlığında bir öbek elde ederiz.