



Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

AYIN SORUSU

Haziran 2025

Soru:

$n \geq 4$ verilmiş bir tam sayı olsun. $n \times n$ satranç tahtasının bazı birim kareleri işaretlenmiştir. Birbirinden farklı iki işaretlenmiş birim kare aynı satırda olup onlarla aynı satırda ve onların arasında bulunan herhangi bir işaretlenmiş birim kare yoksa bu birim kareler *satır bağlı* kareler olsun. Birbirinden farklı iki işaretlenmiş birim kare aynı sütunda olup onlarla aynı sütunda ve onların arasında bulunan herhangi bir işaretlenmiş birim kare yoksa bu birim kareler *sütun bağlı* kareler olsun. Satır veya sütun bağlı işaretlenmiş birim kareler *bağlı* birim kareler olsun. $n \times n$ satranç tahtasının her işaretlenmiş birim karesi tek sayıda işaretlenmiş birim kareyle bağlıysa, $n \times n$ satranç tahtasının işaretlenmiş birim kare sayısı en fazla kaç olabilir?

Çözüm: Cevap: $4n - 8$.

Aşağıda $n = 7$ durumunda $4n - 8$ için örnekler verilmiştir:

					●	
●	●	●	●	●	●	
	●				●	
	●				●	
	●				●	
	●	●	●	●	●	●
	●					

veya

●	●	●	●	●	●	●
	●	●	●	●	●	
	●				●	
	●				●	
	●				●	
					●	
	●					

Şimdi ise satranç tahtası üzerindeki işaretlenmiş birim kare sayısının daha fazla olamayacağını gösterelim.

Yukarı, aşağı, sağ ve sol olmak üzere, 4 yön tanımlayalım. Her işaretlenmiş birim kareden onu tehdit etmeyen yönler doğru ışınlar çizelim. Bu ışıklardan her biri satranç tahtasının 1 uzunlukta bir birim sınır kenarını kesiyor. İki farklı ışın 1 uzunlukta aynı birim kenarı kesemez. Bir işaretlenmiş birim kareyle bağlı olan karelere *tek* kare, üç işaretlenmiş birim kareyle bağlı olan karelere *üçlü* kare diyelim. Her tek kareyle onun ışınlarının kestiği üç birim kenarı eşleyelim. Her üçlü kareyle onun ışınlarının kestiği bir birim kenarı eşleyelim.

Lemma 1. Tek birim kare sayısı en az 4 ise toplam işaretlenmiş birim kare sayısı en fazla $2m + 2n - 8$ dir.

İspat: Tek kare sayısı a , üçlü kare sayısı b olsun. Dört tek karenin her biriyle üçer birim kenar, her üçlü kareyle bir birim kenar eşleşmek zorundadır. Satranç tahtasının kenar uzunluğu $4n$ olduğundan $3a + b \leq 4n$ olur. Demek ki $a \geq 4$ ise, $a + b \leq 4n - 2a \leq 4n - 8$. İspat tamamlanmıştır.

Lemma 2. İşaretlenmiş birim kare sayısı en az $4n - 8$ olsun. O zaman tek kare sayısı en az 4' tür.

İspat: Satranç tahtasının en az bir işaretlenmiş kare içeren en yukarıdaki satırı S_1 en aşağıdaki satırları S_2 , en en soldaki sütunu T_1 ve en sağdaki sütunu T_2 olsun. S_1, S_2, T_1 ve T_2 birer işaretlenmiş kare bulunduruyorsa bu kaleler birbirinden farklıdır ve bu dört karenin her biri tek karedir. S_1, S_2, T_1 ve T_2 den en az ikisi en az ikişer işaretlenmiş kare bulunduruyorsa yine bu karelerden uç kare olan 4 kare tek karedir. Son olarak genelliği bozmadan S_1 üzerinde en az iki ve S_2 üzerinde bir işaretlenmiş kare olsun. O zaman S_1 üzerindeki 2 işaretlenmiş uç kare ve S_2 üzerindeki kare tek karelerdir. $4n - 8 \geq n + 2$ olduğuna göre, S_1 dışında en az 2 işaretlenmiş kare vardır. S_2 üzerindeki tek kare A olsun. En az bir işaretlenmiş kare bulunduran ve S_2 'e en yakın olan satır S' olsun. S' in üzerinde bir işaretlenmiş kare varsa bu kare tek karedir. S' in üzerinde birden fazla işaretlenmiş kare varsa S' in üzerindeki A ile aynı sütunda olmayan işaretlenmiş uç kareler tek karedir. İspat tamamlanmıştır.

Lemma 2 ve Lemma 1'e göre, satranç tahtası üzerindeki işaretlenmiş kare sayısı en fazla $4n - 8$ olabilir.