



Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

AYIN SORUSU

Nisan 2025

Soru:

Her n pozitif tam sayısı için

$$\sum_{i=1}^n a_i \geq n^2 \quad \text{ve} \quad \sum_{i=1}^n a_i^2 \leq n^3 + 2025n$$

koşullarını sağlayan bir sonsuz $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ pozitif gerçel sayı dizisi var mıdır?

Çözüm: Cevap: Bu koşulları sağlayan bir dizi yoktur.

$\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ koşulları sağlayan bir dizi olsun. Sonsuz $n \in \mathbb{Z}^+$ indisi için $a_n > n$ olduğunu gösterelim. Aksini varsayalım. O zaman öyle N sayısı bulunur ki tüm $n > N$ indisleri için $a_n \leq n$ olur. $S = a_1 + \dots + a_N$ olsun. O zaman sorudaki koşula göre,

$$n^2 \leq \sum_{i=1}^n a_i \leq \frac{n^2 + n}{2} + S$$

olur. Yeterince büyük n değerleri için bu eşitsizlik doğru değildir, çelişki.

T_n dizisini

$$T_n = n \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2$$

olarak tanımlayalım. Sorudaki koşullara göre, her n pozitif tam sayısı için $T_n \leq 2025n^2$ olur. Diğer taraftan, $T_n = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i - a_j)^2$ olarak gösterilebilir. $A = 2 \sum_{i=1}^{2026} a_i$ ve $B = \sum_{i=1}^{2026} a_i^2$ olsun ve n tam sayısı da $n > A$ ve $a_n > n$ koşullarını sağlasın. Bu durumda

$$2025n^2 \geq T_n \geq (a_n - a_1)^2 + \dots + (a_n - a_{2026})^2 > 2026n^2 - An + B$$

olur. Fakat bu eşitsizlik $n > A$ için doğru değildir, çelişki.