Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

Ayın Sorusu

Şubat 2025

Soru:

Başlangıçta kırmızı masada farklı renkli 111 bilye bulunmaktadır, beyaz masa boştur. Kırmızı masayla başlamak üzere masalara sırayla işlem yapılıyor. Her defa işlem yapılan masadan bir veya birkaç bilye seçilip diğer masaya aktarılıyor. Aynı bilye öbeği bir defadan fazla seçilmeden en çok kaç işlem yapılabileceğini bulunuz.

Çözüm: Cevap: $2^{111} - 2$.

Toplam hamle sayısının $2^{111} - 1$ olamayacağını gösterelim. Toplam hamle sayısın $2^{111} - 1$ olması için 111 elemanlı bilye kümesinin tüm boş olmayan alt kümeleri seçilmesi gerekiyor. Bir bilyeyi içeren toplam hamle sayısı 2^{110} dır. Bu sayı çift olduğuna göre, tüm hamleler yapıldıktan sonra tüm bilyeler kırmızı masada üzerinde olacaktır. Diğer taraftan $2^{111} - 1$ bir tek sayı olduğuna göre, en son hamleden sonra beyaz masa üzerinde de bilye bulunması gerekiyor, çelişki. Şimdi, hamle sayısının $2^{111} - 2$ olabileceğini gösterelim.

n üzerinden tümevarımla her $n \geq 2$ için, yapılmayan tek hamle $\{a_1\}$ ve tüm hamleler yapıldıktan sonra a_1 bilyesinin beyaz tüm diğer bilyelerin ise kırmızı masa üzerinde olacak şekilde $2^n - 2$ hamle yapılabileceğini gösterelim.

$n = 2$ durumunda gruplar sırasıyla $\{a_1, a_2\}, \{a_2\}$ olarak seçilirse koşullar sağlanmış olur.

$n = k$ durumunda koşulları sağlayan hamlelerin yapılabileceğini varsayalım. $n = k + 1$ durumunda ilk olarak a_{k+1} bilyesini ayırıp kalan bilyelere $n = k$ durumundaki $2^k - 2$ hamleyi yapalım ve sonraki hamlede a_{k+1} bilyesini beyaz masaya aktaralım. Bundan sonra tümevarım varsayımına göre beyaz masada sadece a_{k+1} ve a_1 bilyesi bulunacaktır. a_1 ve a_{k+1} bilyelerini tek hamleyle beyaz masaya aktaralım. tüm bilyeler başlangıçtaki kutuda bulunmuş olur. Son olarak $n = k$ durumundaki $2^k - 2$ hamleyi bu hamlede seçilmiş bilyelere a_{k+1} bilyesini ekleyerek uygularsak toplamda $2^k - 2 + 2 + 2^k - 2 = 2^{k+1} - 2$ hamle yapılmış olur.