



Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

AYIN SORUSU

Ocak 2025

Soru:

p asal sayısının hangi değerlerinde

$$3^p + 4^p + 5^p + 9^p - 98$$

sayısının en çok 6 tane pozitif tam böleni olur?

Çözüm: Cevap: $p = 2, 3, 5$.

$f(p) = 3^p + 4^p + 5^p + 9^p - 98$ olsun. 2,3,5 asal sayıları koşulları sağlıyor: $f(2) = 3 \cdot 11$, $f(3) = 7 \cdot 11^2$, $f(5) = 7 \cdot 9049$.

$p > 5$ olsun. 7 sayısı $3^p + 4^p$, $5^p + 9^p$ ve 98 sayılarını bölüyor. Buna göre, $7 \mid f(p)$. Şimdi

$$\begin{aligned} p \equiv 1 \pmod{10} &\implies f(p) \equiv 3 + 4 + 5 + 9 + 1 \equiv 0 \pmod{11}, \\ p \equiv 3 \pmod{10} &\implies f(p) \equiv 5 + 9 + 4 + 3 + 1 \equiv 0 \pmod{11}, \\ p \equiv 7 \pmod{10} &\implies f(p) \equiv 9 + 5 + 3 + 4 + 1 \equiv 0 \pmod{11}, \\ p \equiv 9 \pmod{10} &\implies f(p) \equiv 4 + 3 + 9 + 5 + 1 \equiv 0 \pmod{11} \end{aligned}$$

olduğuna göre, $11 \mid f(p)$ olur. $f(p)$ sayısının en çok 6 tane pozitif tam böleni olduğuna göre, $f(p)$ sayısının 7 ve 11 dışında böleni yoktur. Diğer taraftan, $p > 5$ durumunda $f(p) > 7 \cdot 11^2 > 7^2 \cdot 11 > 7 \cdot 11$. Sonuç olarak $p > 5$ asal sayıları koşulları sağlamıyor.