Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

Ayın Sorusu

Aralık 2024

Soru:

S kümesi 31 tane pozitif gerçel sayıdan oluşan bir küme olsun. S kümesinin boş olmayan her $A \subset S$ alt kümesi için A nın tüm elemanlarının çarpımını $f(A)$ ile gösterelim. Bir $A \subset S$ alt kümesi için $f(A)$ bir rasyonel sayı ise A ya *rasyonel* alt küme diyelim. Bir $A \subset S$ alt kümesi için $f(A)$ bir irrasyonel sayı ise A ya *irrasyonel* alt küme diyelim. S kümesinin tam olarak 2023 rasyonel alt kümesi olabilir mi? S kümesinin tam olarak 2025 irrasyonel alt kümesi olabilir mi?

Çözüm:

S kümesinin rasyonel alt küme sayısının 2023 olabileceğini gösterelim. n bir pozitif tam sayı olmak üzere, bu kümenin elemanları $i = 0, 1, \ldots, 30$ için $2^{\frac{2^i}{n}}$ olsun. Her bir pozitif tam sayı 2'nin farklı kuvvetlerinin toplamı olarak tek türlü yazılabilir. Bu sebeple, elemanlarının çarpımı rasyonel olan kümelerin sayısı 0'dan $N = 2^{31} - 1$'e kadar olan tam sayılardan n ile tam bölünenlerin sayısına eşittir. Bu sayı da $1 + \left\lfloor \frac{N}{n} \right\rfloor$ sayısına eşittir. Bu sayısının 2023 olması ise,

$$\left\lfloor \frac{N}{n} \right\rfloor = 2022 \iff 2022 \leq \frac{N}{n} < 2023 \iff \frac{N}{2023} < n \leq \frac{N}{2022}$$

olmasına denktir. $N/2022 - N/2023 \geq 1$ iken şartı sağlayan bir n pozitif tam sayısı bulunur. $2022 \cdot 2023 < (2^{11})^2 < 2^{31} < N$ olduğu için buna uygun bir n vardır ve bu n için sorudaki şart sağlanır.

S kümesinin irrasyonel alt küme sayısının 2025 olamayacağını gösterelim. S kümesinin tüm elemanları rasyonel ise, S in boş olmayan $2^{31} - 1$ tane alt kümesinin her biri rasyonel olur ve $2^{31} - 1 > 2025$. $e \in S$ irrasyonel olsun. O zaman e elemanını içermeyen her $A \subset S$ alt kümesi için ya A ya da $A \cup \{e\}$ irrasyoneldir. Dolayısıyla en az $2^{30} > 2025$ irrasyonel alt küme bulunuyor.