Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

Ayın Sorusu

Kasım 2024

Soru:

Başlangıçta tahta üzerinde her birinin 77 koordinatı olan 77 adet

$$(1,0,0,\dots,0),\ (0,1,0,\dots,0),\ \dots,\ (0,0,0,\dots,1)$$

77-lileri yazılmıştır. Her işlemde, tahtada bulunan $(a_1,a_2,\dots,a_{77})$ ve $(b_1,b_2,\dots,b_{77})$ 77-lileri seçiliyor ve tahtaya $(a_1+b_1,a_2+b_2,\dots,a_{77}+b_{77})$ 77-lisi yazılıyor.

$$(0,1,1,\dots,1),\ (1,0,1,\dots,1),\ \dots,\ (1,1,1,\dots,0)$$

77-lilerinin tümünü tahtaya yazmak için en az kaç işlem yapılması gerekiyor?

Çözüm: Cevap: $3\cdot 77-6=225$.

$n\geq 3$ olmak üzere, başlangıçta tahta üzerinde her birinin n koordinatı olan n adet

$$(1,0,0,\dots,0),\ (0,1,0,\dots,0),\ \dots,\ (0,0,0,\dots,1)$$

n-lisi yazıldığı durumda cevabın $3n-6$ olduğunu göstereceğiz.

İlk önce $3n-6$ işlemin yeterli olduğunu iki farklı şekilde gösterelim. i. koordinatı 1 ve kalan koordinatları 0 olan n boyutlu vektör v_i^n, i. koordinatı 0 ve kalan koordinatları 1 olan n boyutlu vektör ise u_i^n olsun.

n üzerinden tümevarım. $n=3$ durumunda $v_1^3+v_2^3$, $v_1^3+v_3^3$ ve $v_2^3+v_3^3$ işlemleri sonucunda gereken u_1^3,u_2^3 ve u_3^3 vektörleri elde ediliyor. $n=k$ durumunda $3k-6$ işlemin yeterli olduğunu varsayalım. $n=k+1$ olsun. İlk işlemde v_k^{k+1} ve v_{k+1}^{k+1} vektörlerini toplayarak $v_k^{k+1}+v_{k+1}^{k+1}\equiv w_{k,k+1}^{k+1}$ vektörünü elde edelim. Tümevarım varsayımına göre, $v_1^k,v_2^k,\dots,v_{k-1}^k$ ve v_k^k vektörlerinden $3k-6$ işlem sonucunda $u_1^k,u_2^k,\dots,u_{k-1}^k$ ve u_k^k vektörleri elde ediliyor. v_1^k yerine v_1^{k+1}, v_2^k yerine $v_2^{k+1},\dots,v_{k-1}^k$ yerine v_{k-1}^{k+1} ve v_k^k yerine $w_{k,k+1}^{k+1}$ alıp aynı $3k-6$ işlemi uygularsak $v_1^{k+1},v_2^{k+1},\dots,v_{k-1}^{k+1}$ ve $w_{k,k+1}^{k+1}$ vektörlerinden $u_1^{k+1},u_2^{k+1},\dots,u_{k-1}^{k+1}$ ve son iki koordinatı 0 olup kalan koordinatları 1 olan $\bar{w}_{k,k+1}^{k+1}$ vektörü elde ediliyor. Son olarak

$v_k^{k+1} + \bar{w}_{k,k+1}^{k+1}$ ve $v_{k+1}^{k+1} + \bar{w}_{k,k+1}^{k+1}$ işlemlerini uygularsak u_k^{k+1} ve u_{k+1}^{k+1} vektörleri elde edilir. Sonuç olarak $1+(3k-6)+2 = 3(k+1)-6$ işlem sonucunda gereken $u_1^{k+1}, u_2^{k+1}, \dots, u_k^{k+1}$ ve u_{k+1}^{k+1} vektörleri elde edildi.

Şimdi ise en az $3n-6$ işlemin gerekli olduğunu gösterelim. $n \geq 3$ olmak üzere, n boyutlu vektörler için gereken en az işlem sayısı $f(n)$ olsun. Tümevarımla $f(n) \geq 3n-6$ olduğunu gösterelim.

$n = 3$ durumunda $f(3) \geq 3$ olduğu açıktır.

Tümevarım varsayımı $n = k$ için doğru olsun: $f(k) \geq 3k-6$. $n = k$ için yapılan işlemleri inceleyelim. v_{k+1}^{k+1} vektörünün ilk kez kullanıldığı işlem A olsun: A işleminde v_{k+1}^{k+1} ve en az bir $m \neq k+1$ için m. koordinatı 0 olmayan bir $r(m)$ vektörü toplanmıştır. Sadece m. koordinatı 0 olan vektörü elde etmek için v_{k+1}^{k+1} en az bir kez daha kullanılacaktır, bu işlem de B olsun. Bir C işleminde de sadece $k+1$. koordinatı 0 olan vektör elde edilecektir. A, B, C işlemlerini yapmayıp, kalan işlemlerde de sonuncu koordinatı silersek $n = k$ için gereken vektörleri elde ederiz. Demek ki $f(k+1) - 3 \geq f(k) \geq 3k-6$ ve buradan da $f(k+1) \geq 3(k+1) - 6$.