Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

Ayın Sorusu

Temmuz-Ağustos 2024

Soru:

$$\frac{10^{a!} - 3^b + 1}{2^a}$$

ifadesinin bir pozitif tam sayının karesine eşit olmasını sağlayan tüm (a, b) pozitif tam sayı ikililerini bulunuz.

Çözüm: Cevap: $(a, b) = (1, 1)$ ve $(1, 2)$.

m bir pozitif tam sayı olmak üzere,

$$\frac{10^{a!} - 3^b + 1}{2^a} = m^2$$

olsun. Denklemi

$$3^b = 10^{a!} - m^2 2^a + 1$$

olarak yeniden düzenleyelim. $a = 1$ durumunda tüm çözümlerin $(a, b) = (1, 1)$ ve $(1, 2)$ olacağı açıktır. $a \geq 2$ durumunda $a!$ çift sayısır. $10^{a!} - m^2 2^a + 1$ sayısı 3 ile bölünüyor. Buna göre, $m^2 2^a \equiv 2 \pmod 3$ ve sonuç olarak a tek sayısır. $a = 3$ durumunda mod 4 den b çift olur. $101 \mid 10^6 + 1 = 3^b + m^2 2^a = c^2 + 2d^2$. -2 101 modunda kare kalan değil ve $101 \nmid 3^{b/2}$, buna göre $a = 2$ durumunda çözüm yoktur. Demek ki $a \geq 5$. Bu durumda mod16 dan $4 \mid b$ ve buna göre de $5 \mid 3^b - 1$ olur. O zaman $5 \mid m$ ve $25 \mid 3^b - 1$. $b = 4k$ olsun: $25 \mid 81^k - 1$. Üssü kaldırma lemmasından (LTE) $v_5(81^k - 1) = v_5(80) + v_5(k) \geq 2$ ve buradan da $5 \mid k$ ve $5 \mid b$. Demek ki $3^b \equiv 1 \pmod{11}$ ve $11 \mid 10^{a!} - m^2 2^a = x^2 - 2y^2$. Fakat 2 mod 11 de kare kalan olamadığından $11 \mid 10^{a!/2}$, bu da bir çelişkidir: $a \geq 2$ durumunda çözüm yoktur.