



Bilkent Üniversitesi  
Matematik Bölümü

AYIN SORUSU

Haziran 2024

**Soru:**

Bir masa üzerinde 353 tane kırmızı top, 535 tane beyaz top ve  $1, 2, \dots, 888$  sayılarıyla numaralandırılmış 888 tane kutu bulunmaktadır. İlk olarak Aslı, her kutuya birer top yerleştiriyor. Zehra tüm kutulardaki top renklerini öğrenmek istiyor. Bunun için Zehra,  $1 \leq i < j \leq 888$  olmak üzere tahtaya  $N$  adet  $(i, j)$  sayı ikilisi yazıyor. Son olarak Aslı, tahtadaki her  $(i, j)$  sayı ikilisi için  $i$  ve  $j$  numaralı kutulardaki topların renklerinin aynı olup olmadığını Zehra'ya söylüyor.  $N$  sayısının en küçük hangi değerinde Zehra tüm kutulardaki top renklerini belirlemeyi garantileyebilir?

**Çözüm:** Cevap: 886.

$N = 886$  durumunda Zehra'nın tüm kutulardaki top renklerini belirlemeyi garantileyebileceğini gösterelim. Bunun için Zehra tahtaya  $(1, 2), (1, 3), \dots, (1, 887)$  ikililerini yazıyor.  $i$  numaralı kutudaki topun numarası  $i$  olsun.  $2, 3, \dots, 887$  numaralı toplardan 1 numaralı top ile aynı renkte olanların sayısı  $s$   $a$ , farklı rekte olanlarının sayısı ise  $b = 886 - a$  olsun. O zaman bu sayılara bağlı olarak topların renkleri belirlenebilir.  $a$  ve  $b$  sayılarının biri 443 den b. If  $a \geq 443$  then ball 1 is white.  $a + 1$  is either 534 or 535. In the first case ball 888 is white, in the second case ball 888 is red. If  $b \geq 443$  then ball 1 is red.  $b$  is either 534 or 535. In the first case ball 888 is white, in the second case ball 888 is red.

Şimdi de  $N \leq 885$  durumunda Zehra'nın tüm kutulardaki top renklerini belirlemeyi garantileyemeyeceğini gösterelim. Zehra  $N$  tane  $(i, j)$  ikilisini seçmiş olsun. 888 köşesinden her biri bir topu temsil eden bir  $G$  çizgesi tanımlayalım. Tahtada  $(i, j)$  ikilisi varsa,  $G$  çizgesinde  $i$  ve  $j$  köşelerini kenarla birleştirelim.  $N \leq 885$  olduğu için  $G$  çizgesinin en az 3 bağlantılı bileşeni vardır. Aslı bu bileşenleri herhangi biri boş olmayan  $C_1, C_2$  ve  $C_3$  gruplarına ayırıyor. Bu gruplardaki köşe sayıları  $|C_1|, |C_2|$  ve  $|C_3|$  olsun. Genelliği bozmadan  $|C_1| \geq |C_2| \geq |C_3|$  kabul edersek  $|C_2| + |C_3| \leq 592$  olur.  $C_2, C_3$  ve  $C_2 \cup C_3$  gruplarından en az biri çift sayıda köşe içeriyor. Aslı çift köşeden oluşan bu grubu  $|A_1| = |A_2| < 296$  olmak üzere  $A_1$  ve  $A_2$  gruplarına ayırıyor. Aslının tahtada yazılan ikilileri önceden bildiğini varsayabiliriz. Aslı  $A_1$  deki tüm topları kırmızı ve  $A_2$  deki tüm topları beyaz ya da tam

tersini yapabilir. Bundan sonra kalan topların renklerini toplamda 353 kırmızı ve 535 beyaz top olacak şekilde belirleyebilir. Her iki durumda Aslı'nın cevapları aynı olacaktır. Sonuç olarak Zehra  $N \leq 885$  durumunda kutulardaki top renklerini belirlemeyi garantiyemez.