Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

Ayın Sorusu

Mart 2024

Soru:

Her pozitif n tam sayısı için, $\varphi(n)$, n sayısını aşmayan ve n ile aralarında asal olan pozitif tam sayıların sayısıdır. Tüm birbirinden farklı a ve b pozitif tam sayıları için

$$a - b \mid f(a) - f(b) \quad \text{ve}$$

$$f(\varphi(a)) = \varphi(f(a))$$

koşullarını sağlayan tüm $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ fonksiyonlarını bulunuz.

Çözüm: Cevap: $f(x) \equiv 1$ ve $f(x) = x$.

$f(\varphi(a)) = \varphi(f(a))$ eşitliğinde $a = 1$ alırsak $f(1) = \varphi(f(1))$ ve $f(1) = 1$ elde ederiz. $a = 2$ alırsak $f(1) = \varphi(f(2))$ gelir ve $f(1) = 1$ olduğuna göre, $f(2)$ ya 1 ya da 2 olur.

Durum 1: $f(2) = 1$. $1 = f(2) = f(\varphi(3)) = \varphi(f(3))$ olduğundan $f(3)$ ya 1 ya da 2 olur. Diğer taraftan $(3-1) \mid f(3)-f(1)$ olduğundan $f(3) = 1$ gelir. Tümevarımla tüm n pozitif tam sayıları için $f(n) = 1$ olduğunu gösterelim. $a = 1, 2, \ldots, n-1$ için $f(a) = 1$ olsun. O zaman $f(\varphi(n)) = \varphi(f(n))$ ve $\varphi(n) \leq n-1$ olduğundan $\varphi(f(n)) = 1$ gelir ve buradan da $f(n)$ ya 1 ya da 2 olur. Son olarak $n-(n-2) \mid f(n)-f(n-2)$ olduğundan $f(n) = 1$ olur.

Durum 2: $f(2) = 2$. Tümevarımla tüm n pozitif tam sayıları için $f(n) = n$ olduğunu gösterelim. $a = 1, 2, \ldots, n-1$ $f(a) = 1$ için $f(a) = a$ olsun. İlk koşula ve tümevarım varsayımına göre, tüm $1 \leq a \leq n-1$ tam sayıları için $n - a \mid f(n) - a$ olur. Sağ tarafa $a - n$ eklersek $n - a \mid f(n) - n$ olur. Demek ki her $1 \leq m \leq n-1$ için $m \mid f(n) - n$. O zaman $1 \leq m \leq n-1$ sayılarının en küçük ortak katı M de $f(n) - n$ sayısını bölüyor ve bir s tam sayısı için $f(n) = Ms + n$ olur. $\varphi(n) < n$ olduğundan tümevarım vrsayımına ve sorudaki ikinci koşula göre $\varphi(n) = \varphi(Ms + n)$ gelir. Diğer taraftan, her $(n, k) = 1$ ve $k < n$ k sayısı M yi bölüyor ve dolayısıyla $(k, Ms+n) = 1$. Buna göre, $\varphi(n) \leq \varphi(Ms+n)$. $s \neq 0$ durumunda $(Ms + n - 1, Ms + n) = 1$ ve $\varphi(n) < \varphi(Ms + n)$ olur. Demek ki $s = 0$ ve $f(n) = n$.