



Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

AYIN SORUSU

Haziran 2023

Soru:

p ve q asal sayılar olmak üzere,

$$p(p^4 + p^2 + 10q) = q(q^2 + 3)$$

eşitliğini sağlayan tüm (p, q) ikililerini bulunuz.

Çözüm: Cevap: $(p, q) = (2, 5)$.

$p = q$ ise ifadenin sol tarafı sağ tarafından daha büyüktür. Buna göre, $p \neq q$. $p > 3$ ise $p \mid q^2 + 3$ ve -3 sayısı p modunda kare kalan oluyor: $p \equiv 1 \pmod{3}$. Buna göre ifadenin sol tarafı 3 modunda

$$p(p^4 + p^2 + 10q) \equiv q + 2 \pmod{3}$$

oluyor. Diğer taraftan Fermat'ın küçük teoreminden $q(q^2 + 3) \equiv q \pmod{3}$, çelişki.

$p = 2, 3$ durumlarından tek çözüm geliyor: $(p, q) = (2, 5)$.