



Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

AYIN SORUSU

Mayıs 2023

Soru:

n öğrencinin bulunduğu bir okulda her öğrencinin tam olarak 971 arkadaşı olup birbirleriyle arkadaş olmayan herhangi iki öğrencinin tam olarak 970 ortak arkadaşı vardır. Buna göre, n nin alabileceği tüm değerleri bulunuz.

Çözüm: Cevap: $n = 972, 974, 980, 1164, 1940$.

Sorunun genel halini çizge kavramı kullanarak yeniden formüle edelim: n köşeli bir G çizgesinde her köşenin derecesi $k < n - 1$ olup komşu olmayan herhangi iki köşenin tam olarak $k - 1$ ortak komşusu vardır. Bu şartı olanaklı kılan tüm (n, k) ikililerini bulunuz.

$n = 972$ durumunda tam çizge koşulları sağlıyor. Diğer durumlarda cevap $a > 1$ ve b pozitif tam sayılar olmak üzere, $(n, k) = (2ab, 2a(b - 1) + 1)$ ve $(n, n - 3)$ ikilileri ($n = 4b$ durumunda $(n, n - 3)$ ikililerini $(n, k) = (2ab, 2a(b - 1) + 1)$ formülü ile kapsanmış oluyor) oluyor.

Bir w köşesinin komşu köşeleri v_1, \dots, v_k olsun. w köşesinin komşusu olmayan bir köşe, w' nun komşularından $k - 1$ tanesine bağlı, yani diğer köşeler arasından tam olarak 1 tane komşusu var. Bu da $G - \{w, v_1, \dots, v_k\}$ çizgesinde tüm köşelerin derecesinin 1 olması demek, yani w' nun komşusu olmayan çift sayıda köşe var, bunlara da u_1, \dots, u_{2l} diyelim. Burada $1 + k + 2l = n$ olduğundan $2l = n - k - 1$ oluyor. Genelliği bozmadan $1 \leq t \leq l$ için u_{2t-1} ve u_{2t} komşu olsun. $l = 1$ durumunda $(n, n - 3)$ ikililerini elde ederiz. $l \geq 2$ olsun. Herhangi bir $t \geq 3$ sayısı için, u_1 ve u_t komşu değil ve u_i 'ler arasındaki birer komşuları ortak değildir. Buna göre, bu iki köşenin v_i 'ler arasındaki $k - 1$ komşuları ortaktır. Benzer durum u_2 ve u_t için de geçerlidir ve sonuç olarak tüm bu köşeler w' nun aynı $k - 1$ köşesine bağlıdır. Genelliği bozmadan, bağlı olmadıkları köşe v_1 olsun. v_1 köşesinin derecesi k olduğundan v_1 tüm v_i lerle komşudur. Buna göre, her $2 \leq i \leq k$ için v_i nin $G - \{w, v_1, u_1, \dots, u_{2l}\}$ çizgesindeki derecesi $k - 1 - 1 - 2l = 2k - n - 1$ dir. Bu durumda,

v_2, \dots, v_k köşelerinden oluşan çizge de sorudaki şartı sağlayan ve (n, k) parametreleri yerine $(k-1, 2k-n-1)$ parametrelerinin olduğu bir çizge oluyor. $(k-1) - (2k-n-1) = n-k$ olduğundan aynı prosedürü tekrar tekrar uygularsak, G çizgesinin $2l+2$ köşeli birtakım parçalardan oluştuğunu, her bir parçanın kendi içinde $l+1$ tane *perfect matching* pozisyonunda kenarlarının olduğunu ve farklı parçaların arasındaki tüm kenarların çizildiğini görürüz. $l+1 = a$ ve parça sayısına da b dersek cevaptaki ikililere ulaşmış oluruz.

$k = 971$ durumunda $2a(b-1) + 1 = 971$ ifadesinden $a|485 = 5 \cdot 97$ elde ediliyor. Buradan $a = 5, 97, 485$ ve $n = 2ab = 980, 1164, 1940$ geliyor. Ayrıca, $(n, n-3)$ formülünden de $n = 974$ geliyor.