



Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

AYIN SORUSU

Şubat 2023

Soru:

$P(x) = x^2 + ax + b$ ve $Q(x) = x^2 + cx + d$ tam katsayılı ikinci dereceden monik polinomları tüm i ve j tam sayıları için $P(i) \neq Q(j)$ koşulunu sağlıyorsa bu polinomlara ayrık polinomlar diyelim. Herhangi ikisi birbirinden ayrık olan en fazla kaç tam katsayılı ikinci dereceden monik polinom olabilir?

Çözüm: Cevap: 2.

Her C tam sayısı için $x \mapsto x + C$ değişken değiştirmesi polinomun değer kümesini değiştirmez. Her $P(x) = x^2 + ax + b$ polinomuna $x \mapsto x - \lfloor \frac{a}{2} \rfloor$ değişken değiştirmesi uygularsak

$$P(x - \lfloor \frac{a}{2} \rfloor) = x^2 + x(a - 2\lfloor \frac{a}{2} \rfloor) + (\lfloor \frac{a}{2} \rfloor)^2 - a(\lfloor \frac{a}{2} \rfloor) + b$$

olduğuna göre ya $P(x) = x^2 + b$ ya da $P(x) = x^2 + x + b$ şeklinde olan polinomlar elde ederiz. Farklı şekilde olan polinomlar ayrık olamaz: $P_1(x) = x^2 + b_1$ ve $P_2(x) = x^2 + x + b_2$ ise $P_1(b_1 - b_2) = P_2(b_1 - b_2)$. Buna göre, herhangi ikisi birbirinden ayrık olan polinomlar kümesi sadece aynı şekilde olan polinomlar içerebilir.

$P_1(x) = x^2 + b_1$ ve $P_2(x) = x^2 + b_2$ olsun. $b_1 - b_2 = 2k + 1$ ise $P_1(k) = P_2(k + 1)$ olur. $b_1 - b_2 = 4k$ ise $P_1(k - 1) = P_2(k + 1)$ olur. Demek ki $P_1(x) = x^2 + b_1$ ve $P_2(x) = x^2 + b_2$ polinomları ayrık ise $b_1 - b_2 = 1, 3 \pmod{4}$ olmak zorundadır. Buna göre, $P(x) = x^2 + b$ şeklinde en fazla iki ayrık polinom olabilir.

$P_1(x) = x^2 + x + b_1$ ve $P_2(x) = x^2 + x + b_2$ olsun. $b_1 - b_2 = 2k$ ise $P_1(k - 1) = P_2(k)$ olur. Demek ki $P_1(x) = x^2 + b_1$ ve $P_2(x) = x^2 + b_2$ polinomları ayrık ise $b_1 - b_2 = 1 \pmod{2}$ olmak zorundadır. Buna göre, $P(x) = x^2 + x + b$ şeklinde en fazla iki ayrık polinom olabilir.

Demek ki herhangi ikisi birbirinden ayrık olan polinomlar kümesi sadece iki polinom içerebilir.

$P_1(x) = x^2$ ve $P_2 = x^2 + 2$ veya $P_1(x) = x^2 + x$ ve $P_2 = x^2 + x + 1$ polinomları ayrıktır.