Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

Ayın Sorusu

Aralık 2022

Soru:

1 den büyük herhangi bir tam kare ile bölünmeyen sayı *kare serbest* sayıdır. $a, a+1$ ve $a+2$ sayılarının her biri kare serbest sayıysa a pozitif tam sayısına *sade sayı* diyelim. Sade sayılar kümesi sonsuz mudur?

Çözüm: Cevap: Sade sayılar kümesi sonsuzdur.

Verilmiş bir n pozitif tam sayısı için, $[1, 4n^2]$ intervalinde 4 ile tam bölünmeyen tam sayıların kümesi $A(n)$ olsun. 9'un bir katı olan her $k \in A(n)$ için $k = 9, 18, 27 \pmod{36}$ olur. Buna göre, bu sayıların sayısı en fazla $3 \cdot \frac{4n^2}{36} + 3$ olur. 25'in bir katı olan her $k \in A(n)$ için $k = 25, 50, 75 \pmod{100}$ olur. Buna göre, bu sayıların sayısı en fazla $3 \cdot \frac{4n^2}{36} + 3$ olur. Benzer şekilde $(2n-1)^2$ bir katı olan sayılara kadar ilerlersek $A(n)$ de kare serbest sayıların sayısının en fazla

$$3n^2\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\cdots+\frac{1}{(2n-1^2)}\right)+3(n-1) = \frac{3n^2}{2}\left(\frac{2}{9-1}+\frac{2}{25-1}+\cdots+\frac{2}{(2n-1)^2-1}\right)+3(n-1)$$

$$= \frac{3n^2}{2}\left(\frac{1}{3-1}-\frac{1}{3+1}+\frac{1}{5-1}-\frac{1}{5+1}\cdots+\frac{1}{(2n-1)-1}-\frac{1}{(2n-1)+1}\right)+3n < \frac{3n^2}{4}+3n$$

olduğunu elde ederiz. $A(n)$ kümesi n^2 tane ayrık ardışık tam sayı üçlüsü içeriyor: $(1,2,3)$, $(5,6,7)$, $(9,10,11)$, $\ldots$ Elde ettiğimiz eşitsizliğe göre, bu üçlülerden en az $n^2 - (\frac{3n^2}{4} + 3n) = \frac{n^2}{4} - 3n$ tanesi sadece kare serbest sayılardan oluşuyor. $\frac{n^2}{4} - 3n$ ifadesinin $n \to \infty$ iken sınırsız olarak arttığına göre, çözüm tamamlanmıştır.