**Bilkent Üniversitesi**
**Matematik Bölümü**

# Ayın Sorusu

Kasım 2022

**Soru:**

$p$ bir asal ve $a$ bir pozitif tam sayı olmak üzere, her $(p, a)$ ikilisi için $\{a_n\}$ ve $\{b_n\}$ dizileri

$$a_1 = a \text{ and } a_{n+1} = a_n + p\lfloor \sqrt[p]{a_n} \rfloor,$$

$$b_n = \sqrt[p]{a_n}$$

olarak tanımlanıyor. $\{b_n\}$ dizisi sonsuz sayıda tam sayı içerirse $(p, a)$ ikilisine *iyi* ikili diyelim.
$p$ nin hangi değerlerinde tüm $a = 1, 2, \ldots$ değerleri için için $(p, a)$ iyi ikilidir?

**Çözüm:** Cevap: $p$ nin tüm değerlerinde tüm $a = 1, 2, \ldots$ değerleri için $(p, a)$ iyi ikilidir.

$p$ bir asal sayı ve $a$ bir pozitif tam sayı olsun. $m^p > a$ olacak şekilde bir $m$ pozitif tam sayısı alalım. $\{a_n\}$ artan dizisinin $m^p$ den büyük olan en küçük terimi $a_k$ olsun. Buna göre, $a_{k-1} < m^p$ ve

$$a_k - a_{k-1} = p\lfloor \sqrt[p]{a_{k-1}} \rfloor < pm.$$

Demek ki $r < pm$ olmak üzere, $a_k = m^p + r$ olur. $\{a_n\}$ dizisinin $(m+1)^p + r - 1$ sayısına eşit olan bir teriminin olduğunu gösterelim. $p$ nin asal olduğuna göre,

$$((m+1)^p + r - 1) - (m^p + r) = \binom{p}{p-1} m^{p-1} + \binom{p}{p-2} m^{p-2} + \cdots + \binom{p}{1} m$$

farkı $pm$ sayısının bir katıdır. Buna göre, $\{a_n\}$ dizisinin $(m+1)^p$ den büyük olan en küçük terimi $a_l = (m+1)^p + r - 1$ şeklindedir.

Aynı yöntemi tekrar tekrar kullanarak $\{a_n\}$ dizisinin $(m+2)^p + r - 2$, $(m+3)^p + r - 3, \ldots, (m + r - 1)^p + 1$ terimlerini ve en sonunda $a_t = (m+r)^p$ terimini içerdiğini gösterebiliriz. Buna göre, $b_t = m + r$ bir tam sayı oluyor. Birbirinden yeterince uzak $m$ sayıları seçerek $\{b_n\}$ dizisinin sonsuz sayıda tam sayı içerdiği sonucuna varıyoruz.