



Bilkent Üniversitesi  
Matematik Bölümü

AYIN SORUSU

Ekim 2022

**Soru:**

Bir partiye katılan  $n$  kişiden her biri üç farklı tür şapkadan birini takmaktadır. En az iki arkadaşının taktıkları şapkalar farklı türde olan kişilere *şanslı* diyelim.  $n$  sayısının hangi değerlerinde **her zaman**, toplam şanslı kişi sayısı azalmayacak biçimde bu partideki bir kişinin şapkasının diğer iki türden birine ait bir şapka ile değiştirmenin mümkün olduğunu gösteriniz.

**Çözüm:** Cevap:  $n$  sayısının 3'ün katı olmadığı tüm değerlerinde.

Köşelerin kişileri ve kenarların arkadaşlıkları temsil ettiği bir  $G$  çizgesi tanımlayalım. Her köşeyi kişilerin şapka renklerine uygun olarak  $a, b, c$  renklerinden birine boyayalım.  $n$  3'ün katı ise toplam şanslı kişi sayısı azalmayacak biçimde bir kişinin şapkasının renginin değiştirilmesinin mümkün olmadığı bir örnek verelim.  $G$  çizgesi her birinin uzunluğu 3 olan birkaç ayrık döngünün bileşimi olup her döngünün köşeleri farklı  $a, b, c$  renklerine boyanırsa herhangi bir renk değişiminde şanslı kişi sayısı azalır. Bundan farklı örnekler de var: 6 köşeli bir döngünün köşeleri  $a, a, b, b, c, c$  olarak boyanırsa koşullar yine sağlanmış olur.

Şimdi de  $n$  sayısının 3'ün katı olmadığı durumlarda bir kişinin şapkasının renginin toplam şanslı kişi sayısı azalmayacak biçimde değiştirmenin mümkün olduğunu gösterelim. Her şanslı kişinin en az iki arkadaşı var. Tam olarak iki arkadaşı olan her şanslı kişi iki farklı şekilde şanslı olmayan kişiye dönüştürülebilir. Bunun için onun arkadaşlarının şapka renklerinin  $(a, b)$  yerine  $(a, a)$  ya da  $(b, b)$  yapılması gerekiyor. En az üç arkadaşı her kişi tek şekilde şanslı olmayan kişiye dönüştürülebilir. Bunun için onun tek şekilde belirlenen bir arkadaşının şapkasının renginin tek türlü belirlenen bir renge boyanması gerekiyor. Partideki bir kişinin şapka rengi  $2 \cdot n$  farklı şekilde değiştirilebilir. Bu değişimlerin her biri bir şanslı kişiyi şanslı olmayan kişi yapıyorsa, her kişinin tam olarak iki arkadaşı olmak zorundadır. O zaman  $G$  birkaç ayrık döngünün bileşimidir. Her köşenin komşuları farklı renktedir ve her renk değişimi komşuları aynı renkte olan bir köşe oluşturuyor. Buna göre, her döngü  $a, \cdot, b, \cdot, c, \cdot, \dots, a, \cdot, b, \cdot, c, \cdot$  olmak zorundadır.  $n$  sayısının 3'ün bir katı olmadığı için böyle bir boyama yapılamaz.