Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

AYIN SORUSU

Mart 2022

Soru:

p ve q asal sayılar olmak üzere,

$$2^p = 2^{q-2} + q!$$

eşitliiğini sağlayan tüm (p, q) ikililerini bulunuz.

Çözüm: Cevap: $(p, q) = (3, 3), (7, 5)$.

$q = 2$ için çözüm yoktur. $q = 3$ ve $q = 5$ için çözümler sadece $(3, 3)$ ve $(5, 7)$ ikilileridir.

$q \geq 7$ çözüm olmadığını gösterelim. q sayısının iki tabanındaki gözterimi kullanılarak $0 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_r$ tam sayılar olmak üzere, $q = 2^{a_1} + 2^{a_2} + \cdots + 2^{a_r}$ olarak yazılabilir. Burada r sayısı q sayısının iki tabanındaki yazılımındaki 1'lerin sayısıdır. Her $1 \leq k \leq r$ ve $1 \leq i \leq a_k$ için $\dfrac{2^{a_k}}{2^i}$ sayısı bir tam sayıdır. Ayrıca, $i > a_k$ iken $\left\lfloor \dfrac{2^{a_k}}{2^i} \right\rfloor = 0$ olmaktadır. Son olarak, $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{2^{a_k}}{2^i} \right\rfloor = 2^{a_k} - 1$. Bu gözlemler kullanılarak, $q!$ sayısını tam bölen 2 nin en büyük kuvveti için

$$v_2(q!) = \sum_{i=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{q}{2^i} \right\rfloor = q - r$$

ifadesi elde edilir. Sorudaki denklem $p - q + 2 > 0$ olmak üzere, $2^{q-2}(2^{p-q+2} - 1) = q!$ şeklinde yazılabilir. Buradan $v_2(q!) = q - 2$ gelir. Demek ki $r = 2$ ve $q = 2^{a_1} + 2^{a_2}$. q asal olduğundan, $a_1 = 0$ ve bir t negatif olmayan tam sayısı için $a_2 = 2^t$ olmalıdır (bir diğer deyişle q bir Fermat asalıdır).

$q \geq 7$ için $2^{p-q+2} \equiv 1 \pmod 7$ ve $p - q + 2 \equiv 0 \pmod 3$ olur. $q = 2^{2^t} + 1 \equiv 2 \pmod 3$ olacağından $3 \mid p$ ve $p = 3$ bulunur. Fakat $q \geq 7$ için $(3, q)$ ikilileri sorudaki denklemi sağlamıyorlar.