Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

Ayın Sorusu

Kasım 2021

Soru:

Hangi p asal sayıları için

$$1 + pn^2 + \prod_{i=1}^{2p-2} Q(x^i)$$

polinomunun en az bir tam sayı kökü olacak biçimde, n tek tam sayısı ve tam sayı katsayılı bir Q(x) polinomunun bulunduğunu belirleyiniz.

Çözüm: Cevap: $p = 2$.

$P(x) = 1 + pn^2 + \prod_{i=1}^{2p-2} Q(x^i)$ olsun. $p = 2$ için $n = 1$ ve $Q(x) = 2x + 1$ ise -1 tam sayısı $P(x)$ polinomunun köküdür:

$$1 + 2 \cdot 1^2 + (2 \cdot (-1) + 1)(2 \cdot (-1^2) + 1) = 0.$$

Şimdi tüm $p \geq 3$ asal sayıları için uygun n tam sayısı ve $Q(x)$ polinomunun bulunmadığını göstereceğiz. Fermat'ın küçük teoremine göre, tüm $1 \leq i \leq p-1$ değerleri için $x^i = x^{i+p-1}$ ve dolayısıyla $Q(x^i) = Q(x^{i+p-1})$ olur. Buna göre, $P(x) = 0$ ifadesi p modunda

$$0 \equiv 1 + pn^2 + \prod_{i=1}^{2p-2} Q(x^i) \equiv 1 + (\prod_{i=1}^{p-1} Q(x^i))^2$$

şeklinde olur. Sonuç olarak -1 p modunda bir kare kalandır ve $p \equiv 1 \pmod 4$. Demek ki $P(x) = 0$ ifadesi 4 modunda

$$0 \equiv 1 + 1 + \prod_{i=1}^{2p-2} Q(x^i) \equiv 2 + (\prod_{i=1}^{p-1} Q(x^i))^2 \qquad (1)$$

şeklinde olur. Tam x ve pozitif i, j sayıları için $Q(x^i)$ ve $Q(x^j)$ sayılarının pariteleri aynıdır. Buna göre, tüm $Q(x^i)$ sayılarının tek oldukları ve tüm $Q(x^i)$ sayılarının çift oldukları durumlar (1) ile çelişiyor. İspat tamamlanmıştır.