Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

Ayın Sorusu

Ekim 2021

Soru:

Her biri n ile bölünen n tane tam sayının karelerinin toplamı şekilnde yazılabilen her pozitif tam sayı, hiçbiri n ile bölünmeyen n tane tam sayının karelerinin toplamı şekilnde de yazılabiliyorsa, n pozitif tam sayısına *iyi* sayı diyelim. Tüm iyi sayıları bulunuz.

Çözüm: Cevap: $1, 2$ ve 4 dışındaki tüm pozitif tam sayılar.

Her n iyi sayısının tüm katlarının iyi sayı olduğunu gösterelim. $m = nk$ olmak üzere, her $1 \leq i \leq m$ için $m|x_i$ olsun. $n|x_i$ ve n bir iyi sayı olduğuna göre, her $0 \leq l \leq k-1$ indisi için

$$\sum_{i=nl+1}^{n(l+1)} x_i^2 = \sum_{i=nl+1}^{n(l+1)} y_i^2$$

olacak şekilde hiçbiri n ile tam bölünmeyen $y_1, y_2, \dots, y_m$ sayıları bulunur. Buna göre,

$$\sum_{i=1}^{m=nk} x_i^2 = \sum_{i=1}^{m=nk} y_i^2$$

ve tüm $1 \leq i \leq m$ indisleri için $m = nk \nmid y_i$ olur.

Şimdi tüm pozitif tek tam sayıların iyi sayı olduğunu gösterelim.

Lemma: n bir pozitif tek tam sayı olmak üzere, $x_1, x_2, \dots, x_n$ tam sayılarından en az biri n ile tam bölünmeyen sayı olsun. O zaman

$$\sum_{i=1}^{n} (nx_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2$$

olacak şekilde hiçbiri n ile tam bölünmeyen $y_1, y_2, \dots, y_n$ tam sayıları vardır.

İspat: Genelliği bozmadan $n \nmid x_1$ kabul edelim. Let $X = 2\sum_{i=1}^{n} x_i$ olsun. $n|X$ ise x_1 yerine $-x_1$ yazarsak $n \nmid x_1$ ve n tek olduğundan $n \nmid 4x_1$. Sonuç olarak yine genelliği bozmadan $n \nmid X$ alabiliriz. Şimdi

$$\sum_{i=1}^{n}(nx_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}(X - nx_i)^2$$

eşitliğinde her $1 \leq i \leq n$ için $y_i = X - nx_i$ alırsak lemmanın ispatı tamamlanmış olur.

n bir pozitif tam sayı olmak üzere, bir a sayısı her biri n ile tam bölünen n tam sayının karelerinin toplamına eşitse, $a = \sum_{i=1}^{n}(n^r x_i)^2$ ve bir $1 \leq i \leq n$ indisi için $n \nmid x_i$ olacak şekilde bir r tam sayısı ve $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tam sayıları bulunur. Lemmayı r kez kullanarak $a = \sum_{i=1}^{n} y_i^2$ ve her $1 \leq i \leq n$ için $n \nmid y_i$ olacak şekilde $y_1, y_2, \ldots, y_n$ tam sayıları elde edilir.

Şimdi 8 sayısının iyi sayı olduğunu gösterelim. Bir a sayısı her biri 8 ile tam bölünen 8 tam sayının karelerinin toplamına eşitse $64|a$ ve $a \geq 64$ olur. O zaman Lagrange' ın 4 kare teoremine göre, x_1, x_2, x_3, x_4 tam sayılar olmak üzere, $a = 1^2+4^2+4^2+4^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2$ olur. Bu durumda $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2 \equiv 7 \ (mod\ 8)$ ve 7 sayısının $(mod\ 8)$ de sadece $1+1+1+4$ şeklinde gösterildiğine göre, tüm $1 \leq i \leq 4$ indisleri için $8 \nmid x_i$.

4 sayısı iyi sayı değildir: $32 = 4^2 + 4^2 + 0^2 + 0^2$ sayısı hiçbiri 4 ile bölünmeyen 4 sayının karesinin toplamı şeklinde gösterilemez. İyi sayının tüm katlarının da iyi sayı olduğuna göre, 1 ve 2 sayıları da iyi sayı değildir.