Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

Ayın Sorusu

Eylül 2021

Soru:

Bir ω çemberi üzerindeki 777 noktadan her biri $1, 2, \ldots, k$ renklerinden birine boyanmıştır. Her nokta ve her $1 \leq r \leq k$ rengi için ω çemberinin bu noktayı içeren ve üzerindeki noktaların en az yarısının r renginde olduğu bir yayı bulunuyor. Buna göre, k nin alabileceği en büyük değeri bulunuz.

Çözüm: Çözüm. Cevap: 3.

Çember üzerindeki 777 noktanın her birini üç renkten birine, herhangi üç ardışık nokta farklı renklerde olacak şekilde boyanırsa koşullar sağlanmış olur.

Şimdi $k \leq 3$ olduğunu göstereceğiz. Her yayı, bu yayın içindeki uç noktalarla temsil edeceğiz: üzerindeki noktalar saat yönünde sırasıyla $A, B, \ldots, Z$ olan yay (A, Z) olarak işaretlenecektir. Bir r rengi ve r rengine boyalı olmayan herhangi bir A noktası için koşulları sağlayan yaylardan en az sayıda nokta içeren yay $l_A(r) = (B, C)$ olsun.

Gözlem 1. $l_A(r) = (B, C)$ ise ya $(B, C) = (B, A)$ ya da $(B, C) = (A, C)$ olacaktır.

Aksini varsayalım. (B, A) yayındaki nokta sayısı m, r rengine boyalı nokta sayısı ise b, (A, C) yayındaki nokta sayısı n, r rengine boyalı nokta sayısı ise c olsun. O zaman $\dfrac{b}{m} < \dfrac{1}{2}$ ve $\dfrac{c}{n} < \dfrac{1}{2}$ olur. Buradan $2b \leq m - 1$ ve $2c \leq n - 1$ gelir. Buna göre,

$$2b + 2c \leq m + n - 2 < m + n - 1 \quad \text{ve} \quad \frac{b + c}{m + n - 1} < \frac{1}{2}$$

elde edilir. Bu da $l_A(r) = (B, C)$ yayının koşulları sağladığı ile çelişiyor.

Şimdi genelliği bozmadan r rengi ve r rengine boyalı olmayan herhangi bir A noktası için $l_A(r) = (A, C)$ olsun. Tanımlara göre, C noktası r rengindedir.

Gözlem 2. (A, C) yayındaki nokta sayısı n, r rengine boyalı nokta sayısı ise c olsun. O zaman $\frac{c}{n} = \frac{1}{2}$.

Aksini varsayalım: $\frac{c}{n} > \frac{1}{2}$ olsun. O zaman $2c > n$ ve $2c \geq n + 1$ olur. Buna göre,

$$2c - 2 \geq n - 1 \ \text{ ve sonuç olarak } \ \frac{c-1}{n-1} \geq \frac{1}{2}$$

elde edilir. Bu da (A, C) yayının en az sayıda nokta içeren yay olması ile çelişiyor.

Gözlem 3. r rengi ve r rengine boyalı olmayan A ve B $(A \neq B)$ noktaları için $l_A(r) = (A, C)$ ve $l_B(r) = (B, D)$ olsun. O zaman $C \neq D$.

Aksini varsayalım: $C = D$ olsun. Genelliği bozmadan $B \in (A, C)$ olduğunu varsayalım. A noktasından saat yönünde ilerlerken B den önceki nokta T olsun. Gözlem 2 ye göre, AC yayında r renkli noktaların oranı ile BC yayında r renkli noktaların oranı $\frac{1}{2}$ dir. Buna göre (A, T) yayında da r renkli noktaların oranı $\frac{1}{2}$ olacaktır. Bu ise, (A, C) yayının en sayıda nokta içeren yay olması ile çelişiyor.

$k > 3$ olsun. O zaman en fazla $\lfloor \frac{777}{4} \rfloor = 194$ noktanın boyalı olduğu bir renk vardır, bu renk 1 olsun. 1 rengine boyalı olmayan her A noktası için Gözlem 1 e göre, $l_A(r)$ ya (A, E) ya da (F, A) şeklindedir (E ve F noktaları 1 rengindedir). Gözlem 3 e göre, 1 rengine boyalı her nokta bu tür yaylardan en fazla ikisinin uç noktası alabilir. 1 rengine boyalı olmayan nokta sayısı en az ve $583 > 2 \cdot 194$ olduğuna göre, çelişki elde edilir. İspat tamamlanmıştır.