Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

Ayın Sorusu

Mayıs 2021

Soru:

Tüm a, b, c pozitif gerçel sayıları için,

$$T \leq \frac{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc}{ab^2 + bc^2 + ca^2 - 3abc}$$

eşitsizliğini sağlayan en büyük T gerçel sayısını bulunuz.

Çözüm: Cevap: $T = \dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}$.

Eşitsizlikte genelliği bozmadan $\min\{a, b, c\} = c$ alabiliriz. Bu durumda negatif olmayan x ve y sayıları için $a = c + x,\ b = c + y$ olur. Yeni c, x ve y değişkenlerinde

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (c+x)^3 + (c+y)^3 + c^3 - 3(c+x)(c+y)c = (3c+x+y)(x^2 - xy + y^2)$$

$$ab^2+bc^2+ca^2-3abc = (c+x)(c+y)^2+(c+y)c^2+c(c+x)^2-3(c+x)(c+y)c = (x^2-xy+y^2)c+xy^2$$

olur ve eşitsizlik tüm pozitif c, x, y için

$$(3 - T)(x^2 - xy + y^2)c + x^3 + y^3 - Txy^2 \geq 0 \qquad (1)$$

şekilini alır.

$x = 1,\ y = \sqrt[3]{2}$ ve $c > 0$ olursa (1) eşitsizliğinden

$$(3 - T)(1 - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4})c + 3 - \sqrt[3]{4}T \geq 0 \qquad (2)$$

elde edilir. (2) eşitsizliğini sağlayan her T için $T \leq \dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}$ olduğunu gösterelim. Aksini varsayalım: $T > \dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}$ olsun. $T > 3$ ise (2) eşitsizliği herhangi bir $c > 0$ için sağlanmıyor. $T < 3$ ise (2) eşitsizliği

$$c < \frac{\sqrt[3]{4}T - 3}{(3-T)(1-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})}$$

değerlerinde sağlanmıyor. Sonuç olarak $T \leq \dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}$.

Şimdi $T = \dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}$ için (1) eşitsizliğinin sağlandığını gösterelim. $T < 3$ olduğuna göre, $(3-T)(x^2 - xy + y^2)c \geq 0$ ve (1) eşitsizliğinin ispatı için $x^3 + y^3 \geq Txy^2$ eşitlizliğinin gösterilmesi yeterli olur. Gereken eşitsizlik de aritmetik-geometrik ortalama eşitsizliğinden geliyor:

$$x^3 + y^3 = x^3 + \frac{y^3}{2} + \frac{y^3}{2} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{4}}xy^2 = Txy^2.$$

İspat tamamlanmıştır.