



Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

AYIN SORUSU

Nisan 2021

Soru:

Bir kırmızı ve bir beyaz kutunun her birinde başlangıçta 500 taş ve bu taşlar dışında yeterli sayıda yedek taş bulunuyor. Oyuna Aslı başlamak üzere, Aslı ve Zehra sırayla hamle yaparak bir oyun oynuyorlar. Sırası gelen oyuncu kırmızı kutuya 1 taş ekleme (K^+), kırmızı kutudan 1 taş çıkarma (K^-), beyaz kutuya 1 taş ekleme (B^+) ve beyaz kutudan 1 taş çıkarma (B^-) hamlelerinden birini, bir önceki adımda diğer oyuncunun yaptığı hamleye bağlı olarak, aşağıdaki tabloya göre seçip yapıyor (ilk adımda Aslı istediği hamleyi seçiyor):

| Bir önceki hamle | K^+ | K^- | B^+ | B^- |
|-------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|
| Aslı'nın hamlesi | K^+ veya B^+ | K^- veya B^- | B^+ veya K^- | B^- veya K^+ |
| Zehra'nın hamlesi | K^+ veya B^- | K^- veya B^+ | B^+ veya K^+ | B^- veya K^- |

Herhangi bir kutudaki taş sayısını 0 veya 1001 yapan oyuncu oyunu kaybedeceğine göre, oyunu kim kazanır?

Çözüm: Cevap: Aslı kazanıyor.

Kutuların her birinde n taşla başlayan ve bir kutudaki taş sayısını 0 veya $2n + 1$ yapan oyuncunun oyunu kaybettiği oyuna n -oyun diyelim. Her n değeri için Aslı'nın n -oyunu kazanacağını göstereceğiz.

Beyaz ve kırmızı kutulardaki taş sayılarının sırasıyla a ve b olduğu durumu (a, b) olarak işaretleyelim. $(1, p)$, $(q, 1)$, $(2n, r)$ ve $(s, 2n)$ durumları *sınır durumları* olsun. (a, b) durumunda hamle sırası $a + b = 0 \pmod{2}$ ise Aslı'nın, $a + b = 1 \pmod{2}$ ise Zehra'nın olacaktır.

Lemma. İlk olarak sınır durumuna hamle yapan oyuncu oyunu kaybeder.

İspat: İlk olarak Zehra sınır durumlarından birine hamle yapmış olsun. Bundan sonra Aslı hep sınır durumlarına hamle yaparsa Zehra da kendi hamlelerini sadece sınır durumlarına yapma zorunda kalır. Bu süreç $(1, 2n)$ veya $(2n, 1)$ durumuyla sonuçlanır ve bundan sonra Zehra oyunu kendisine kaybettirecek hamleyi yapma zorunda kalır. İlk olarak sınır

durumlarından birine hamle yapan Aslı olursa, benzer şekilde süreç $(1, 1)$ veya $(2n, 2n)$ durumuyla sonuçlanır ve Aslı da oyunu kendisine kaybettirecek hamleyi yapma zorunda kalır.

Örnek olarak, Zehra $(q, 1)$ sınır durumuna hamle yapmış olsun. Aslı $(q - 1, 1)$ hamlesini yaparsa Zehra zorunlu olarak $(q - 2, 1)$ hamlesini yapar. Aslı $(q - 3, 1)$ hamlesini yaparak devam ederse bu süreç en sonunda $(1, 1)$ durumuna gelir. $1 + 1 = 0 \pmod{2}$ olduğundan hamle sırası Aslı'da olur. Aslı $(1, 2)$ hamlesini, Zehra zorunlu olarak $(1, 3)$ hamlesini yaparak devam ederlerse bu süreç en sonunda $(1, 2n)$ durumuna gelir. $1 + 2n + 2 = 1 \pmod{2}$ olduğundan Zehra oyunu kendisine kaybettirecek hamleyi yapma zorunda kalır. Diğer sınır durumlarında başlayan durumlar benzerdir.

n üzerinden tümevarım yaparak n -oyununda Aslı'nın en son $(1, 2n - 1) \rightarrow (1, 2n)$ veya $(2n, 2) \rightarrow (2n, 1)$ hamlelerini yaparak kazanacağını göstereceğiz.

$n = 1$ durumunda Aslı oyunu $(1, 1) \rightarrow (1, 2)$ hamlesiyle kazanıyor.

Aslı'nın n -oyunu kazandığını varsayarak $(n + 1)$ -oyunu inceleyelim. Aslı n -oyundaki kazanma yöntemini uygulayarak $(1, 2n - 1) \rightarrow (1, 2n)$ veya $(2n, 2) \rightarrow (2n, 1)$ durumlarından birine gelmeye çalışacaktır. Aslı n -oyunundaki tüm hamleleri yaparak amacına ulaşmadan Zehra $(1, p), (q, 1), (2n + 2, r), (s, 2n + 2)$ sınır hamlelerinden birini yaparsa Aslı oyunu Lemma'ya göre kazanır. Aksi takdirde durum $(1, 2n)$ veya $(2n, 1)$ durumuna gelir ve Zehra bir sınır durumuna hamle yapma zorunda kalır ve Aslı yine oyunu Lemma'ya göre kazanır.