Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

Ayın Sorusu

Ocak 2021

Soru:

Bir $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ tam sayı dizisi, $a_1 = 1, a_2 = 2$ ve her $n \geq 1$ için

$$a_{n+2} = a_{n+1}^2 + (n+2)a_{n+1} - a_n^2 - na_n$$

eşitliğini sağlıyor. Bu dizinin en az bir terimini bölen her asal sayıya *iyi* asal sayı diyelim.

a) Sonsuz tane iyi asal sayı bulunduğunu gösteriniz.

b) Üç tane iyi olmayan asal sayı bulunuz.

Çözüm:

$(b_n)_{n=1}^{\infty}$ dizisini $b_1 = 1$ ve her $n \geq 1$ için $b_{n+1} = a_n^2 + na_n$ olarak tanımlayalım. Buna göre,

$$a_{n+2} - a_{n+1} = a_{n+1}^2 + (n+1)a_{n+1} - a_n^2 - na_n = b_{n+2} - b_{n+1}$$

olur. Aynı zamanda $a_1 = b_1 = 1$ ve $a_2 = b_2 = 2$ olduğuna göre, her $n \geq 1$ için $a_n = b_n$ olur. O zaman her $n \geq 1$ için $a_{n+1} = b_{n+1} = a_n(a_n + n)$ elde edilir. Sonlu tane iyi asal sayı olduğunun varsayalım ve bu sayılar $p_1, p_2, \ldots, p_k$ olsun. $a_n \mid a_{n+1}$ olduğuna göre, tüm $m \geq n$ sayıları için $a_n \mid a_m$ olur. Buna göre, bir i, n ikilisi için $p_i \mid a_n$ ise, tüm $m \geq n$ sayıları için $p_i \mid a_m$ olacaktır. Sonuç olarak tüm $n > N$ sayıları için $p_1 \cdot p_2 \cdots p_k \mid a_n$ olacak şekilde bir N tam sayısı bulunacaktır. $\ell > N + 1$ ve $\ell \equiv 2 \pmod{p_1 \cdot p_2 \cdots p_k}$ olacak şekilde bir ℓ tam sayısı alalım. O zaman $a_\ell = a_{\ell-1}(a_{\ell-1} + \ell - 1)$ ve $a_{\ell-1} + \ell - 1$ ifadesi tüm $i = 1, 2, \ldots, k$ sayıları için p_i ile bölünmeyecektır. $a_{\ell-1} + \ell - 1 > 1$ olduğu için a_ℓ sayısının $p_1, p_2, \ldots, p_k$ dışında bir asal böleni olma zorundadır, çelişki.

b) $3, 5, 19$ sayılarının $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ dizisinin herhangi bir terimini bölmediklerini ve dolayısıyla iyi asal sayı olmadıklarını göstereceğiz.

$a_{n+1} = a_n(a_n + n)$ olduğuna göre, p bir asal sayı ve m bir tam sayı olmak üzere, $a_m \equiv a_{m+p} \pmod{p}$ ise, tüm $\ell \geq m$ tam sayıları için de $a_\ell \equiv a_{\ell+p} \pmod{p}$ olacaktır. Buna göre, m

indisinden başlayarak dizi p modunda bir periyodik dizi olacaktır. Dolayısıyla, bir m sayısı için, her $n < m + p$ değerinde $p \nmid a_n$ ise, tüm n değerleri için de $p \nmid a_n$ olacaktır.

$(a_n)_{n=1}^{\infty}$ dizisini $3, 5$ ve 19 modunda inceleyerek $a_m \equiv a_{m+p} \pmod p$ koşulunu sağlayan m ve p sayılarını belirleyelim:

$a_1, a_2, a_3, a_4 \equiv 1, 2, 2, 1 \pmod 3$. Buna göre, $m = 1, p = 3$.
$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 \equiv 1, 2, 3, 3, 1, 1 \pmod 5$. Buna göre, $m = 1, p = 5$.
$a_1, a_2, \ldots, a_{25} \equiv 1, 2, 8, 12, 2, 14, 14, 9, 1, 10, 10, 1, 13, 15, 17, 12, 13, 10, 14, 6, 4, 5, 2, 12, 14 \pmod{19}$. Buna göre, $m = 6, p = 19$.

İspat tamamlanmıştır.