**Bilkent Üniversitesi**
**Matematik Bölümü**

# Ayın Sorusu

Kasım 2020

**Soru:**

$i, j \in \{1, 2, \ldots, 2020\}$ olmak üzere, $a_{i,j}$ pozitif gerçel sayıları her $(i, j)$ için $a_{i,j}a_{j,i} = 1$ koşulunu sağlıyorlar. Her $i = 1, \ldots, 2020$ için $c_i = \sum_{k=1}^{2020} a_{ki}$ olsun. $\sum_{i=1}^{2020} \frac{1}{c_i}$ ifadesinin alabileceği en büyük değeri bulunuz.

**Çözüm:** Cevap: 1.

$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{c_j} = c$ olsun. Her $(i, j)$ için $a_{i,j} = 1$ olursa, $c = 1$ olur. Şimdi $c \leq 1$ olduğunu gösterelim. Cauchy-Schwarz eşitsizliğine göre, her pozitff tam $i$ ve gerçel $x_1, \ldots, x_n$ sayıları için

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j^2}{a_{ji}} \geq \frac{\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right)^2}{\sum_{j=1}^{n} a_{ji}}. \tag{1}$$

Her $i$ ve $j$ için $a_{ij}a_{ji} = 1$. Buna göre, $x_j = \frac{1}{c_j}$ alırsak her $i$ için (1)' den

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{a_{ij}}{c_j^2} \geq c^2 \frac{1}{c_i} \tag{2}$$

elde ederiz. Tüm $i$ sayıları için (2) eşitsizliklerini toplarsak,

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{a_{ij}}{c_j^2} \geq c^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{c_i} = c^3. \tag{3}$$

elde ederiz. Şimdi

$$(4) \qquad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{a_{ij}}{c_j^2}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{a_{ij}}{c_j^2}=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{c_j^2}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\right)=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{c_j^2}c_j\right)=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{c_j}=c$$

olduğuna göre, (3) ve (4) eşitsizliklerinden $c \geq c^3$ gelir. $c$ pozitif olduğuna göre, $c \leq 1$ olur.

**Çözüm 2**. $n$ üzerinden tümevarım kullanacağız. $n = 2$ durumunda $a_{1,2} = a$ alırsak, eşitsizlik $\dfrac{1}{c_1}+\dfrac{1}{c_2}=\dfrac{1}{1+a}+\dfrac{1}{1+1/a}=1$ eşitliğine dönüşüyor.

Eşitlislik $n = k$ için doğru olsun: $\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{c_i} \leq 1$. Eşitlizliği $n = k+1$ için ispatlayalım. Cauchy-Schwarz eşitsizliğine göre, her $c, a, x \in \mathbb{R}$ için $(c+a)(\frac{x^2}{c}+\frac{1}{a}) \geq (x+1)^2$. Bunu

$$\frac{1}{c+a} \leq \left(\frac{x^2}{c}+\frac{1}{a}\right)(x+1)^{-2}$$

olarak yazalım. Buna göre, her $x$ için

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{c_i+a_{k+1,i}} \leq \sum_{i=1}^{k}\left(\frac{x^2}{c_i}+\frac{1}{a_{k+1,i}}\right)(x+1)^{-2} \leq \frac{x^2+\sum_{i=1}^{k}a_{i,k+1}}{(x+1)^2}$$

elde ederiz. Şimdi $x = \sum_{i=1}^{k} a_{i,k+1}$ alırsak

$$\sum_{i=1}^{k+1}\frac{1}{\sum_{j=1}^{k+1}a_{j,i}}=\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{c_i+a_{k+1,i}}+\frac{1}{\sum_{j=1}^{k}a_{j,k+1}+a_{k+1,k+1}} \leq \frac{x^2+x}{(x+1)^2}+\frac{1}{x+1}=1$$

olur. İspat tamamalandı.