Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

Ayın Sorusu

Mayıs 2020

Soru:

$\mathbb{Z}^+$ ile pozitif tam sayılar kümesi gösteriliyor. $f\colon \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ bir fonksiyon olmak üzere her $\ell \in \mathbb{Z}^+$ için f_ℓ ile $\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{\ell \text{ tane}}$ bileşke fonksiyonu gösteriliyor. Her $n \in \mathbb{Z}^+$ için,

$$(n-1)^{2020} < \prod_{\ell=1}^{2020} f_\ell(n) < n^{2020} + n^{2019}$$

eşitsizliğini sağlayan tüm $f\colon \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ fonksiyonlarını bulunuz.

Çözüm: Cevap: Sadece $f(n) = n$ fonksiyonu. İspatı n üzerinden tümevarımla yapacağız.

$n = 1$ ise $0 < \prod_{\ell=1}^{2020} f_\ell(1) < 2$. Buradan $\prod_{\ell=1}^{2020} f_\ell(1) = 1$ ve $f(1) = f_1(1) = 1$ gelir. Her $k < n$ için $f(k) = k$ olduğunu varsayalım.

$f(n) \le n-1$ olursa, her $\ell \ge 1$ için $f_\ell(n) = f(n) \le n-1$ ve $(n-1)^{2020} < \prod_{\ell=1}^{2020} f_\ell(n) \le (n-1)^{2020}$ gelir, çelişki.

$f(n) \ge n+1$ olursa,

$$n^{2020} + n^{2019} > \prod_{\ell=1}^{2020} f_\ell(n) = f(n) \prod_{\ell=2}^{2020} f_\ell(n) \ge (n+1) \prod_{\ell=2}^{2020} f_\ell(n).$$

Buradan $n^{2019} > \prod_{\ell=2}^{2020} f_\ell(n)$ gelir. Demek ki $f_\ell(n) < n$ olacak şekilde $2 \le l \le 2020$ sayıları bulunur. Bu l sayılarının en küçüğü s olsun. O zaman $f_{s-1}(n) \ge n$ ve $f_s(n) < n$. $f_{s-1}(n) = q$ olsun. O zaman $\prod_{i=1}^{2020} f_i(q) \le (q-1)^{2020}$ olur ve $n = q$ durumunda $(n-1)^{2020} < \prod_{\ell=1}^{2020} f_\ell(n)$ eşitsizliği ile çelişkisi elde edilir:

$$(q-1)^{2020} < \prod_{i=1}^{2020} f_i(q) \le (q-1)^{2020}.$$

Sonuç olarak, $f(n) = n$ elde edilir.