Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

Ayın Sorusu

Mart 2020

Soru:

$$\frac{a^3+b^3}{ab+4}=2020$$

denklemini sağlayan tüm (a,b) pozitif tam sayı ikililerini bulunuz.

Çözüm: Cevap: $(1009, 1011)$ ve $(1011, 1009)$.

Verilen denklemi

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=4\cdot 5\cdot 101\cdot (ab+4) \qquad (1)$$

olarak yazalım. $p\in\{5,101\}$ olsun. O halde $p=6k+5$ olan k tam sayısı vardır. $p|ab$ ise, $p|a^3+b^3$ olduğundan $p|a$ ve $p|b$'dir. O zaman (1)'de sol taraf p^3 ile bölünür, ancak sağ taraf bölünmez. Demek ki $p\not|ab$. b'nin $\pmod p$'deki tersi b^{-1} olmak üzere $c\equiv ab^{-1} \pmod p$ olsun. $p|a^3+b^3$ olduğundan $c^3\equiv -1 \pmod p$ elde edilir. Fermat Teoremi'nden dolayı $c^{6k+4}\equiv 1 \pmod p$'dir. Buradan $c\equiv -1 \pmod p$, yani $p|a+b$ sonucu çıkar. Sonuç olarak $505|a+b$. a ve b'nin ya ikisi de tek ya da ikisi de çifttir.

Durum 1: a ve b tektir: (1)'den $4|a+b$'dir. O halde $2020|a+b$ ve $2020\le a+b$ elde edilir. (1)'den $a^2-ab+b^2\le ab+4$ sonucu çıkar. Demek ki $(a-b)^2\le 4$. $\Rightarrow |a-b|=0$ veya 2. $a=b$ için çözüm bulunmadığı kolayca görülür. $|a-b|=2$ için $a+b=2020$ olur ve $(1009,1011)$ ve $(1011,1009)$ çözümleri bulunur.

Durum 2: a ve b çifttir: $a=2x$ ve $b=2y$. (1)'de yerine yazarsak

$$(x+y)(x^2-xy+y^2)=2\cdot 5\cdot 101\cdot (xy+1) \qquad (2)$$

eşitliği elde edilir. x ve y'nin ya ikisi de çifttir ya da ikisi de tektir. Demek ki $2|x+y$. $505|a+b=2(x+y)$ olduğundan $505|x+y$ olduğunu biliyoruz. Sonuç olarak $1010|x+y$ ve $1010\le x+y$ elde edilir. (2)'den $x^2-xy+y^2\le xy+1$'dir. Buradan$(x-y)^2\le 1$ ve $|x-y|\le 1$ elde edilir. Sonuç olarak $x=y$ olur. Ancak bu durumda (2)'yi sağlayan tam sayıların bulunmadığı kolayca kontrol edilir.