Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

Ayın Sorusu

Aralık 2019

Soru:

a, b ve c; $ab + bc + ca \leq 1$ koşulunu sağlayan pozitif gerçel sayılar olmak üzere,

$$8abc\,\Big(\frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1} + \frac{1}{c^2+1}\Big) - a - b - c$$

ifadesinin alabileceği en büyük değeri bulunuz.

Çözüm: İfadenin en büyük değeri $\sqrt{3}$ dür. ($a = b = c = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ durumunda).

Aritmetik-Geometrik ortalama eşitsizliğini kullanarak $a^2 + 1 \geq a^2 + ab + bc + ca \geq 4a\sqrt{bc}$ elde ederiz. Buna göre, $2\sqrt{bc} \geq \dfrac{8abc}{a^2+1}$. b^2+1 ve c^2+1 ifadelerini içeren benzer eşitsizlikleri toplarsak

$$8abc\,\Big(\frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1} + \frac{1}{c^2+1}\Big) \leq 2(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca})$$

elde ederiz. Buna göre, cevabın $\sqrt{3}$ olduğunu göstermek için

$$a + b + c + \sqrt{3} \geq 2(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}) \qquad (1)$$

eşitsizliğini ispatlamak yeterli olacaktır. $1 \geq ab+bc+ca$ ve Cauchy-Schwartz eşitlizliklerinden

$$\sqrt{3} \geq \sqrt{1+1+1}\sqrt{ab+bc+ca} \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} \qquad (2)$$

gelir. $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0, (\sqrt{b} - \sqrt{c})^2 \geq 0, (\sqrt{c} - \sqrt{a})^2 \geq 0$ eşitlizliklerinin toplarsak

$$ab + bc + ca \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} \qquad (3)$$

elde ederiz. Son olarak (1) eşitlizliği (3) ve (2) eşitlizliklerinin toplamından elde edilir.