Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

Ayın Sorusu

Eylül 2019

Soru:

$p > 2$ bir asal sayı, $m > 1$ ve n pozitif tam sayılar olmak üzere,

$$\frac{m^{pn} - 1}{m^n - 1}$$

bir asal sayı ise,

$$pn | (p-1)^n + 1$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

İlk önce n nin p nin bir küvveti olduğunu gösterelim. p bölmüyor t olmak üzere, $n = p^k t$ eşitliğini sağlayan tam sayılar $t \geq 1$ ve $k \geq 0$ olsun. $M = m^{p^k}$ olsun. Koşullara göre, bir q asal sayısı için $M^{pt} - 1 = (M^t - 1)q$. Tüm pozitif a ve b sayıları için $(M^a - 1, M^b - 1) = M^{(a,b)} - 1$ olduğundan $(M^p - 1, M^t - 1) = M - 1$. $M^p - 1$ ve $M^t - 1$ sayıl;arının her ikisi $M^{pt} - 1$ sayısını bölüyor. Buna göre, $\dfrac{(M^p - 1)(M^t - 1)}{M - 1}$ sayısı $M^{pt} - 1$ sayısını bölüyor. Demek ki, $\dfrac{M^p - 1}{M - 1}$ sayısı $\dfrac{M^{pt} - 1}{M^t - 1} = q$ sayısını bölüyor. Buna göre, $\dfrac{M^p - 1}{M - 1}$ sayısı 1 ya da q olabilir. Bu sayı bariz şekilde 1 olamaz ve q ye eşittir. Buradan $t = 1$ olur. p bir tek asal sayıdır. Buna göre, $p^{k+1} | (p-1)^{p^k} + 1$ ispatını tamamlamak için $(p-1)^{p^k}$ sayısının binom açılımını yapmak yeterlidir.