Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

Ayın Sorusu

Haziran 2019

Soru:

Sabit olmayan gerçel katsayılı bir $P(x)$ polinomunun tüm kökleri gerçel sayılardır.

$$(P(x))^2 = P(Q(x))$$

eşitliğini her x gerçel sayısı için sağlayan gerçel katsayılı bir $Q(x)$ polinomu bulunuyorsa, $P(x)$ polinomunun en fazla kaç farklı kökü olabilir?

Çözüm: Cevap: 1.

$r_1 < \cdots < r_k$ olmak üzere, $P(x) = A(x-r_1)^{d_1}\cdots(x-r_k)^{d_k}$ $r_1 < \cdots < r_k$ olsun. $Q(x)$ polinomunun derecesinin 2 olduğu açıktır. a, b ve c gerçel sayılar olmak üzere, $Q(x) = ax^2+bx+c$ olsun. Şimdi sorudaki koşul

$$A^2\prod_{i=1}^{k}(x-r_i)^{2d_i} = A\prod_{i=1}^{k}(ax^2+bx+c-r_i)^{d_i}$$

şeklinde yazılabilir. Her i için $ax^2+bx+c-r_i$ polinomunun köklerini r_s ve r_t olsun. Diğer taraftan, her i için köklerin toplamı $-b/a$ sayısına eşittir. Buna göre, $(P(x))^2$ nin kökleri her çiftin toplamı eşit olacak şekilde çiftlere ayrılabilir. (r_1, r_s) ve $(r_k,\ r_t)$ bu çiftlerden ikisi olsun. $r_1 \le r_t$, $r_s \le r_k$ ve $r_1+r_s = r_k+r_t$ olduğuna göre, $r_s = r_k$ ve $r_t = r_1$ olacaktır. Demek ki her r_1 kökü r_k kökü ile, ve her r_k kökü ise r_1 kökü ile çift oluşturacaktır. Buradan $d_1 = d_k$ elde edilir. Tümevarımla her i için $d_i = d_{k+1-i}$ ve tüm çiftlerin $\{r_j, r_{k+1-j}\}$ şeklinde olduğu kolaylıkla gösterilir.

Buna göre, her m için $(c-r_m)/a$ ifadesi bir j için r_jr_{k+1-j} ifadesine eşit olacaktır. r_jr_{k+1-j} ifadelerinin en fazla $\lfloor\frac{k+1}{2}\rfloor$ farklı değer aldığı nedeniyle $k \le \lfloor\frac{k+1}{2}\rfloor$ ve buradan da $k \le 1$ elde ediyoruz.

Örnek: $P\left(x\right) = x$ ve $Q\left(x\right) = x^2$ alırsak $P\left(x\right)^2 = P\left(Q\left(x\right)\right) = x^2$ olur. Burada $P(x)$ polinomunun bir farklı kökü var.