



Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

AYIN SORUSU

Mayıs 2019

Soru:

$S = \{1, 2, \dots, 2019\}$ olmak üzere, A_1, A_2, \dots, A_n alt kümelerinin herhangi üçünün birleşimi S 'ye eşit olup bu alt kümelerin birleşimi S ye eşit olan ikisi bulunmamaktadır. Buna göre n 'nin alabileceği en büyük değeri bulunuz.

Çözüm: Cevap: 64.

$n \geq 65$ olursa sırasız A_i, A_j alt küme ikililerin sayısı en az $\binom{65}{2} = 2080$ olacaktır. Koşullara göre, her A_i, A_j ikilisi için $c(i, j) \notin A_i \cup A_j$ olacak şekilde bir $c(i, j) \in S$ vardır. $2080 > 2019$ olduğundan $c(k, l) = c(p, q)$ olacak şekilde A_k, A_l ve A_p, A_q ikilileri bulunacaktır. O zaman k, l, p, q indislerinden en az üçü farklı olduğundan birleşimi S olmayan üç alt küme bulunur, çelişki.

Şimdi $n = 64$ için bir örnek verelim. $i, j, 1 \leq i, j \leq 64$ olmak üzere, sırasız i, j indis ikililerinin sayısı $\binom{64}{2} = 2016$ dır. Bu ikililerle $\{1, 2, \dots, 2016\}$ kümesi arasında herhangi bir birebir eşleme tanımlayalım: $A_i, A_j \leftrightarrow m(i, j)$. $A_1 = A_2 = \dots = A_{64} = S$ olarak başlayalım ve her $m = m(i, j) \in \{1, 2, \dots, 2016\}$ sayısı için A_i ve A_j alt kümelerinin her birinden m sayısını çıkaralım. Buna göre her m sayısı tam olarak iki alt kümede bulunmuyor ve elde edilen A_1, A_2, \dots, A_{64} alt kümeleri koşulları sağlıyor.