



Bilkent Üniversitesi  
Matematik Bölümü

AYIN SORUSU

Nisan 2019

**Soru:**

2019 torbanın her birinde  $1, 2, \dots, 2019$  sayılarıyla numaralandırılmış ve toplam ağırlıkları 2019 gr olan 2019 taş bulunuyor. Bu koşulları sağlayan her durumda ağırlıkları toplamı en az 2019 gr olan ve herhangi ikisi farklı numaralı ve farklı torbalarda bulunan birkaç taş en az  $k$  farklı şekilde seçilebiliyorsa,  $k$  nin alabileceği en büyük değer nedir?

**Çözüm:** Cevap: 2018!.

Herhangi ikisi farklı numaralı ve farklı torbalarda bulunan 2019 taştan oluşan kümeye *uygun küme* diyelim. Her  $i = 1, 2, \dots, 2019$  için  $i$  numaralı torbadan alınan taşın numarası  $\sigma_i$  olmak üzere,  $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{2019})$  bir uygun küme olsun.  $k$  bir pozitif tam sayı olmak üzere, her  $i = 1, 2, \dots, 2019$  için  $\sigma'_i + k = \sigma''_i \pmod{2019}$  ise,  $(\sigma'_1, \sigma'_2, \dots, \sigma'_{2019})$  ve  $(\sigma''_1, \sigma''_2, \dots, \sigma''_{2019})$  birbirine benzer uygun kümeler olsun. O zaman her uygun küme kendisi dışında 2018 uygun kümeyle benzer olacak ve her uygun küme, her biri 2019 benzer kümeden oluşan  $\frac{2019!}{2019} = 2018!$  tane benzerlik sınıfından birinin elemanı olacaktır. Herhangi bir benzerlik sınıfındaki tüm kümelerin toplam ağırlığını hesaplayalım. Her taş bu toplama tam olarak bir kez katkıda bulunduğu için bu sayı  $2019 \cdot 2019$  olacaktır. Buna göre, her benzerlik sınıfında toplam ağırlığı en az 2019 olan en az bir uygun küme bulunacaktır. Buna göre, her zaman en az 2018! uygun küme bulunuyor.

Şimdi uygun küme sayısı tam olarak 2018! olan bir örnek verelim. Birinci torbadaki taşların ağırlıkları sırasıyla

$$1 + \frac{2018}{2019}, 1 - \frac{1}{2019}, 1 - \frac{1}{2019}, \dots, 1 - \frac{1}{2019},$$

tüm diğer taşların ağırlıkları ise 1 olsun. O zaman ağırlıkları toplamı en az 2019 olan ve herhangi ikisi farklı numaralı ve farklı torbalarda bulunan her taş kümesi

(†) birinci torbanın birinci taşını içerecektir, aksi takdirde bu kümenin ağırlığı en fazla  $2019 - \frac{1}{2019} < 2019$  olur,

(† †) 2019 taş içerecektir, aksi takdirde bu kümenin ağırlığı en fazla

$$1 + \frac{2018}{2019} + 2017 = 2019 - \frac{1}{2019} < 2019 \text{ olur.}$$

Buna göre, ağırlıkları toplamı en az 2019 olan ve herhangi ikisi farklı numaralı ve farklı torbalarda bulunan taş kümesi  $2018!$  farklı şekilde seçilebilir.