Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

Ayın Sorusu

Mart 2019

Soru:

a, b, c pozitif gerçel sayıları $abc = 1,\ a + b + c = 5$ ve

$$(ab + 2a + 2b - 9)(bc + 2b + 2c - 9)(ca + 2c + 2a - 9) \geq 0$$

koşullarını sağlamak üzere,

$$ab + bc + ac$$

sayısının alabileceği en küçük değeri bulunuz.

Çözüm: Cevap: 5.

Koşullara göre,

$$ab + 2a + 2b - 9 = \frac{1}{c} + 2(5 - c) - 9 = \frac{1}{c} - 2c + 1 = \frac{1}{c}(2c + 1)(1 - c).$$

$bc+2b+2c-9$ ve $ca+2c+2a-9$ için de benzer formüller geçerlidir. Buna göre, $(abc = 1)$

$$(ab+2a+2b-9)(bc+2b+2c-9)(ca+2c+2a-9) = (2a+1)(2b+1)(2c+1)(1-a)(1-b)(1-c) \geq 0.$$

Şimdi $(2a + 1)(2b + 1)(2c + 1) > 0$ olduğundan

$$(1 - a)(1 - b)(1 - c) = -abc - a - b - c + ab + bc + bc + 1 \geq 0$$

ve $ab + bc + ac \geq 5$. Eşitlik durumu: $(a, b, c) = (1, 2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3})$.