



Bilkent Üniversitesi  
Matematik Bölümü

## AYIN SORUSU

Aralık 2018

### Soru:

2019 öğrencisi olan bir okulda, herhangi iki öğrenciyi alırsak alalım, bunların ikisiyle birden arkadaş olan tam olarak bir öğrenci bulunuyor. Bu okulda en çok arkadaşı olan ve en az arkadaşı olan öğrencilerin arkadaş sayıları arasındaki fark en az kaç olabilir?

**Çözüm:** Cevap: 2016.

$A$  ve  $B$  aralarında arkadaş olmasın.  $X$  öğrencisi  $A$ 'nın arkadaşı ise, sorudaki koşullara göre  $X$  ve  $B$ 'nin tam olarak bir ortak  $Y$  arkadaşları olur.  $A$ 'nın her  $X$  arkadaşını  $B$ 'nin bir  $Y$  arkadaşına götüren fonksiyon birebir ve örtendir:  $A$ 'nın  $X_1$  ve  $X_2$  arkadaşları için tanımlanmış  $Y_1$  ve  $Y_2$  aynı kişi olursa,  $(X_1, X_2)$  ikilisinin  $A$  ve  $Y_1$  ortak arkadaşları bulunacaktır. Sonuç olarak aralarında arkadaş olmayan herhangi iki öğrencinin arkadaş sayıları aynıdır.

$k$  bir pozitif tam sayı olsun. Arkadaş sayısı tam olarak  $k$  olan öğrencilerden oluşan ve arkadaş sayısı  $k$  olmayan öğrencilerden oluşan kümeleri tanımlayalım. Her öğrenci bu iki kümeden birinin elemanı olup diğer kümedeki tüm öğrencilerle arkadaş olacaktır. Buna göre bu iki kümenin birinin eleman sayısı en fazla 1 olma zorundadır. Sonuç olarak ya tüm öğrencilerin arkadaş sayıları aynı olacak ya da herkesle arkadaş olan bir öğrenci bulunacaktır.

Bir  $k$  değeri için her öğrencinin arkadaş sayısı  $k$  olsun. Okuldaki toplam öğrenci ikilisi sayısı  $\binom{2019}{2}$  dır. Her öğrenci için bu öğrencinin arkadaş olduğu öğrenci ikililerini sayıp, elde edilen sayıları toplarsak yine okuldaki toplam öğrenci ikilisi sayısını elde ederiz. Buna göre  $2019 \binom{k}{2} = \binom{2019}{2}$  ve buradan da  $k(k-1) = 2018$  çelişkisi gelir.

O zaman herkesle arkadaş olan bir  $A_1$  öğrencisi bulunur ve  $1 \leq i \leq 1009$  için  $A_{2i}$  ve  $A_{2i+1}$  öğrencileri arkadaş olur. Bu durumda da cevap  $2018 - 2 = 2016$  olur.