Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

Ayın Sorusu

Ekim 2018

Soru:

$a_0, a_1, \ldots, a_{100}$ ve $b_1, b_2, \ldots, b_{100}$ gerçel sayı dizileri olmak üzere her $n = 0, 1, \ldots, 99$ için

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2}, \quad b_{n+1} = \frac{1}{2} - a_n \quad \text{veya} \quad a_{n+1} = 2a_n^2, \quad b_{n+1} = a_n$$

sağlanıyor. $a_{100} \leq a_0$ ise $b_1 + b_2 + \cdots + b_{100}$ ifadesinin alabileceği en büyük değer nedir?

Çözüm: Cevap: 50.

$a_0 < 0$ durumunda $a_{100} > a_0$ olur. $a_0 = 0$ durumunda $b_n \in \{0, 1/2\}$ ve buradan da $S = b_1 + b_2 + \cdots + b_{100} \leq 50$ gelir. $a_0 > 0$ durumunda (a_n) dizisinin tüm elemanları pozitif oluyor. O zaman

$$\left(a_n - \frac{a_{n-1}}{2}\right)\left(a_n - 2a_{n-1}^2\right) = 0 \quad \text{ve} \quad a_{100} \leq a_0.$$

Son denklemi yeniden düzenleyelim:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} + \frac{a_{n-1}^2}{a_n} = 2a_{n-1} + \frac{1}{2} \tag{1}$$

$n = 1, 2, ..., 100$ değerleri için (1) denkleminini taraf tarafa toplarsak

$$\sum_{n=1}^{100} \frac{a_n}{a_{n-1}} + \sum_{n=1}^{100} \frac{a_{n-1}^2}{a_n} = 2\sum_{n=1}^{100} a_{n-1} + 50 \tag{2}$$

elde ederiz. Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden

$$\sum_{n=1}^{100} \frac{a_{n-1}^2}{a_n} \geq \frac{(a_0 + a_1 + \cdots + a_{99})^2}{a_1 + a_2 + \cdots + a_{100}} \geq a_0 + a_2 + \cdots + a_{99} = \sum_{n=1}^{100} a_{n-1}$$

gelir. O zaman (2)'den

$$\sum_{n=1}^{100}\left(\frac{a_n}{a_{n-1}} - a_{n-1}\right) \le 50$$

elde edilir. Sorunun koşullarına göre, her $n = 1, 2, \ldots, 100$ değeri için $\dfrac{a_n}{a_{n-1}} - a_{n-1} = b_n$. Sonuç olarak $S \le 50$ elde edilir.

Eşitlik durumu: $a_i = 1/2, \quad i = 0, 1, ..., 100, \quad b_i = 1/2, \quad i = 1, 2, ..., 100.$