Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

Ayın Sorusu

Temmuz-Ağustos 2018

Soru:

x, y, z pozitif gerçel sayılar olmak üzere $\sqrt{x}, \sqrt{y}, \sqrt{z}$ bir üçgenin kenar uzunlukları ve $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{x}=5$ ise,

$$\frac{x(y^2-2z^2)}{z}+\frac{y(z^2-2x^2)}{x}+\frac{z(x^2-2y^2)}{y} \geq 0$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$ ve $\sqrt{z}$ bir üçgenin kenarları olduğu için

$$(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})(\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z})(\sqrt{y}+\sqrt{z}-\sqrt{x})(\sqrt{z}+\sqrt{x}-\sqrt{y})$$

$$= 2(xy+yz+zx)-x^2-y^2-z^2 \geq 0 \qquad (\dagger)$$

Sorudaki diğer koşula göre elde ettiğimiz

$$\begin{aligned} 5xy &= \left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)xy = x^2+\frac{xy^2}{z}+yz \\ 5yz &= \left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)yz = y^2+\frac{yz^2}{x}+zx \\ 5zx &= \left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)zx = z^2+\frac{zx^2}{y}+xy \end{aligned}$$

eşitliklerini toplarsak

$$2(xy+yz+zx)-(x^2+y^2+z^2) = \frac{xy^2}{z}+\frac{yz^2}{x}+\frac{zx^2}{y}-2(xy+yz+zx)$$

elde ederiz. (†) eşitsizliğine göre son eşitlikte sol taraf negatif değildir. Demek ki sağ taraf da negatif değildir:

$$\frac{x(y^2-2z^2)}{z}+\frac{y(z^2-2x^2)}{x}+\frac{z(x^2-2y^2)}{y}\geq 0.$$

Not. $x=\max\{x,y,z\}$ olsun. O zaman eşitlik u, $u^3-2u^2-u+1=0$ denkleminin $(0,1)$ aralığındaki tek gerçel kökü olmak üzere ($u\approx 0.555$) $\sqrt{\dfrac{y}{x}}=u$, $\sqrt{\dfrac{z}{x}}=1-u$ durumunda sağlanıyor.