Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

Ayın Sorusu

Mayıs 2018

Soru:

Bir çember etrafına dizilmiş $n \geq 3$ adet kutudan bazıları seçilip, seçilen her kutuya ve her iki komşusuna birer bilye yerleştiriliyor. Bu şekilde elde edilebilecek farklı bilye dağılımlarının sayısını bulunuz.

Çözüm: Cevap: for $n = 3k$ için $2^n - 3 \cdot 2^{n/3} + 2$ ve 2^n için $n \neq 3k$.

Kutular 2^n farklı şekilde seçilebilir. Bir bilye dağılımının iki veya daha fazla farklı seçimin sonucunda elde edildiği durumları inceleyelim. C_1 ve C_2 farklı seçimlerinden aynı dağılım elde ediliyorsa bu seçimler herhangi iki ardışık kutuda farklı olmalılar. Aksi halde C_1 ve C_2 tamamen aynı oluyorlar. Kutuları saat yönünde $1, 2, \dots n$ olarak numaralandıralım ve $i + j$ yi $\pmod n$ de tanımlayalım. C seçiminde m kutusu seçilmişse $C(m) = X$, seçilmemişse $C(m) = Y$ yazalım. İki ardışık kutu için seçenek XX, XY, YX, YY dir. $C_1(m) = X, C_1(m+1) = X$ ve $C_2(m) = Y, C_2(m+1) = Y$ ise, C_1 ve C_2 seçeneklerinde m kutusunda farklı sayıda bilye bulunacaktır ve $C_1 \neq C_2$ olacaktır. Demek ki en fazla üç farklı seçimden aynı dağılım elde edilebilir. n sayısı 3 ün katı ise, aynı dağılım elde edilen iki üçlü vardır:

$$\begin{aligned} C_1 &= ...XXYXXYXXYXXY... \\ C_2 &= ...XYXXYXXYXXYX... \\ C_3 &= ...YXXYXXYXXYXX... \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} C_1 &= ...YYXYYXYYXYYX... \\ C_2 &= ...YXYYXYYXYYXY... \\ C_3 &= ...XYYXYYXYYXYY... \end{aligned} \tag{2}$$

Bu iki durumun her birinde her seçim diğer her seçimin bir kaydırmasıdır. n sayısı 3 ün katı değilse, böyle üçlüler bulunmuyor.

Şimdi sadece iki seçimden aynı dağılımın elde edildiği durumları inceleyelim. Bu durumda C_1 ve C_2 m için $C_1(m) \neq C_2(m)$ ve $C_1(m+1) \neq C_2(m+1)$ olacak şekilde bir m kutusu bulunma zorundadır. Aksi halde bir m için $C_1(m) = C_2(m), C_1(m+2) = C_2(m+2),$

$C_1(m+4) = C_2(m+3), \ldots$ ve buradan da C_1 ve C_2 aynı oluyor. Genelliği bozmadan $C_1(m) = X, C_1(m+1) = Y$ ve $C_2(m) = Y, C_2(m+1) = X$ olsun. O zaman $Z = X$ veya $Z = Y$ olmak üzere, $C_1(m+2) = C_2(m+2) = Z$. Benzer şekilde $C_1(m+3) = X, C_1(m+4) = Y$ ve $C_2(m+3) = Y, C_2(m+4) = X$ olsun. O zaman $Z = X$ veya $Z = Y$ olmak üzere, $C_1(m+5) = C_2(m+5) = Z$. Bu şekilde devam edersek m kutusundan başlayarak C_1 ve C_2 sırasıyla $XYZ_1XYZ_2XYZ_3XYZ_4...$ ve $YXZ_1YXZ_2YXZ_3YXZ_4...$ olacaktır. n sayısı 3 ün katı değilse, bu diziler çembersel olarak kapanamıyor.

Sonuç olarak, n sayısı 3 ün katı değilse, farklı seçimlerden farklı dağılımlar elde ediliyor ve cevap 2^n oluyor.

n sayısı 3 ün katı ise, her Z_i lerin yerleri üç farklı şekilde tanımlanıyor. Bir seçimde $Z_1 = Z_2 = Z_3...$ alırsak (1) ve (2) deki altı dizinin biri elde edilecektir. Demek ki $3 \cdot (2^{n/3} - 2) \cdot 2$ seçim için bu seçimle aynı dağılım elde edilen tam olarak bir farklı seçim vardır. Sonuç olarak cevap

$$2^n - 6 - 6 \cdot (2^{n/3} - 2) + \frac{6}{3} + \frac{6}{2} \cdot (2^{n/3} - 2) = 2^n - 3 \cdot 2^{n/3} + 2$$

oluyor.