



Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

AYIN SORUSU

Nisan 2018

Soru:

Bir okulda, herhangi ikisi birbiriyle arkadaş olan 18 öğrenciden oluşan her bir gruba *takım* diyelim. Bu okulda, her öğrencinin en az bir takıma dahil olduğu fakat herhangi iki öğrencinin arkadaşlıkları sona ererse en az bir öğrencinin hiçbir takıma dahil olmadığı biliniyor. Bir takımdaki öğrencilerden en az birinin bu takımın dışında hiç arkadaşı yoksa bu takıma *özel takım* diyelim. Birbiriyle arkadaş olan herhangi iki öğrencinin dahil oldukları bir ortak özel takımın bulunduğunu gösteriniz.

Çözüm:

Birbiriyle arkadaş olan herhangi A ve B öğrencilerinin dahil oldukları bir özel takımın bulunduğunu gösterelim. Elmanları öğrencilerden oluşan ve aşağıdaki koşulları sağlayan en çok elemanlı S_1, S_2, \dots, S_m dizisi tanımlayalım:

- her $1 \leq i < j \leq m$ için $S_i \neq S_j$
- her $1 \leq i \leq m$ için S_i yi içeren her takım $A, B, S_1, S_2, \dots, S_{i-1}$ i de içeriyor.

A ve B nin arkadaşlıkları sona erince bir S_1 öğrencisinin hiçbir takıma dahil olmayacağı nedeniyle S_1 in dahil olduğu her takım A ve B yi de içeriyor. Bu nedenle bu dizinin en az bir elemanı bulunuyor (S_1 öğrencisi A veya B ile aynı olabiliyor).

S_m nin dahil olduğu herhangi bir T takımı alalım ve S_m nin T dışında bir S' arkadaşının bulunduğunu varsayalım. S_m ve S' nin arkadaşlıkları sona ererse bir S'' öğrencisi herhangi bir takıma dahil olmayacaktır. Demek ki S'' nin dahil olduğu her takım S_m yi ve dolayısıyla $A, B, S_1, S_2, \dots, S_{m-1}$ yi de içerecektir. Diğer taraftan S_m nin her takımının S_1, S_2, \dots, S_{m-1} yi ve S'' nin her takımının S' yi içerdiği nedeniyle S'' öğrencisi S_1, S_2, \dots, S_{m-1} den farklıdır. Bu durumda S'' öğrencisi S_1, S_2, \dots, S_m dizisine eklenebiliyor ve bu da dizinin en çok elemanlı olduğu koşuluyla çelişiyor. Sonuç olarak T takımı özeldir (S_m nin dahil olduğu tek takım vardır).