Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

Ayın Sorusu

Şubat 2018

Soru:

Tüm x, y ve z pozitif gerçel sayları için

$$\frac{x^2+1}{(x+y)^2+4(z+1)}+\frac{y^2+1}{(y+z)^2+4(x+1)}+\frac{z^2+1}{(z+x)^2+4(y+1)} \geq T$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, T gerçel sayısının alabileceği en büyük değeri bulunuz.

Çözüm: Cevap: $T = \frac{1}{2}$.

$(x+y)^2 \leq 2(x^2+y^2)$ ve $4z+4 \leq 2(z^2+3)$ eşitsizliklerinin doğru olduğu açıktır. O zaman

$$\frac{x^2+1}{(x+y)^2+4(z+1)} \geq \frac{x^2+1}{2(x^2+y^2+z^2+3)}.$$

Şimdi (y, z) ve (y, z) ikilileri için de benzer eşitsizlikleri yazıp bu üç eşitsizliği toplarsak

$$\frac{x^2+1}{(x+y)^2+4(z+1)}+\frac{y^2+1}{(y+z)^2+4(x+1)}+\frac{z^2+1}{(z+x)^2+4(y+1)} \geq \frac{x^2+y^2+z^2+3}{2(x^2+y^2+z^2+3)} = \frac{1}{2}.$$

elde ederiz. $x = y = z = 1$ durumunda son eşitsizliğin sol tarafı $\frac{1}{2}$ değerine eşit oluyor.