Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

Ayın Sorusu

Ocak 2018

Soru:

Elemanları pozitif tam sayılardan oluşan $x_0, x_1, \ldots, x_{2018}$ *yeni yıl* dizisi

† $\quad 1 = x_0 \le x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_{2018}$

†† $\quad$ dizi tam olarak 100 farklı değer alıyor

† † † $\quad \displaystyle\sum_{i=2}^{2018} x_i(x_i - x_{i-2}) = 9998$

koşullarını sağlıyor. Yeni yıl dizilerinin sayısını bulunuz.

Çözüm: Cevap: $\binom{1918}{98} + \binom{98}{2}\binom{1918}{95}$.

Tüm $k \ge 5$ ve $n \ge 2k-2$ sayıları için $1 = x_0 \le x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n$ ve $\displaystyle\sum_{i=2}^{n} x_i(x_i - x_{i-2}) = k^2 - 2$ koşullarını sağlayan ve k farklı değer alan dizi sayısının $\binom{n-k}{k-2} + \binom{k}{2}\binom{n-k}{k-5}$ olduğunu göstereceğiz.

Dizi azalmayan olduğundan her $i \ge 2$ için

$$(x_i - x_{i-2} - 1)(x_i - x_{i-1}) \ge 0 \qquad (1)$$

Buradan

$$x_i^2 - x_i x_{i-2} + x_{i-1}x_{i-2} - x_i x_{i-1} \ge x_i - x_{i-1}$$

$i = 2, 3, \ldots, n$ için (1) eşitsizliklerini toplarsak

$$\sum_{i=2}^{n} x_i(x_i - x_{i-2}) \ge x_n(x_{n-1} + 1) - 2x_1 \qquad (2)$$

elde ediyoruz.

Durum 1: $x_1 = 1$. Dizi k farklı değer alıyor:

$$x_n \geq k \text{ and } x_{n-1} \geq k-1 \qquad (3)$$

(2) ni kullanarak

$$\sum_{i=2}^{n} x_i(x_i - x_{i-2}) \geq k^2 - 2$$

elde ediyoruz. Demek ki (1) ve (3) eşitsizlikleri eşitlik olma zorundadır: $x_n = k, x_{n-1} = k-1$ ve $i = 2, 3, \ldots, n$ için $x_i - x_{i-2} = 1$ veya $x_i = x_{i-1}$ olacaktır. Buradan $x_i - x_{i-1} \leq 1$ elde ediyoruz. Bir i için $x_i - x_{i-1} = x_{i-1} - x_{i-2} = 1$ olursa $x_i - x_{i-2} = 2$ çelişkisi oluşuyor. Demek ki, dizide eşit sayılardan oluşan blokların uzunluğu en az 2 olma zorundadır. Dizini tanımlamak için dizi elemanlarının $2, 3, \ldots, k-1$ değerlerini aldığı en küçük indisleri belirtmemiz gerekiyor. Bu da $t_1 + t_2 + \cdots + t_{k-1} = n$ denkleminin her değişkenin 1'den büyük olduğu tam sayı çözüm sayısına eşittir. Sonuç:

$$\binom{n - 2(k-1) + k - 1 - 1}{k-2} = \binom{n-k}{k-2}.$$

Durum 2: $x_1 \geq 2$. Dizi k farklı değer alıyor:

$$x_n \geq x_1 + k - 2 \text{ and } x_{n-1} \geq x_1 + k - 3 \qquad (4)$$

(2) ni kullanarak

$$\sum_{i=2}^{n} x_i(x_i - x_{i-2}) \geq (x_1 + k - 2)^2 - 2x_1$$

elde ediyoruz.

$$0 = \sum_{i=2}^{n} x_i(x_i - x_{i-2}) - (k^2 - 2) \geq (x_1 - 2)(x_1 + 2m - 4) - 2$$

$x_1 > 2$ olursa sağ taraf pozitif oluyor. Demek ki $x_1 = 2$. $x_1 = 2$ olduğundan $x_n \geq k, x_{n-1} \geq k-1$. Son eşitsizlikler eşitlik olmazsa (2) den $\sum_{i=2}^{n} x_i(x_i - x_{i-2}) > k^2 - 2$. Demek ki $x_n = k$ ve $x_{n-1} = k-1$. O zaman dizi 1 den k ya tüm değerleri alıyor ve $x_i - x_{i-1} \leq 1$. Demek ki (1) deki $(x_i - x_{i-2} - 1)(x_i - x_{i-1})$ ifadesi 0 dışında sadece in 1'e eşit olabiliyor. O zaman $\sum_{i=2}^{n} x_i(x_i - x_{i-2}) = (k^2 - 2)$ olaması için iki farklı i indisi için $(x_i - x_{i-2} - 1)(x_i - x_{i-1}) = 1$ olacaktır: $x_i - x_{i-1} = x_{i-1} - x_{i-2} = 1$. Demek ki, dizide eşit sayılardan oluşan blokların uzunluğu en az 2 olma zorundadır fakat tek elemandan oluşan iki blok vardır. Dizini tanımlamak için bir elemanlı bloklardaki elemanları ve dizi elemanlarının $2, 3, \ldots, k-1$ değerlerini aldığı en küçük indisleri belirtmemiz gerekiyor. Bu da $t_1 + t_2 + \cdots + t_{k-4} = n - 3$ denkleminin her değişkenin 1'den büyük olduğu tam sayı çözüm sayısına eşittir. Sonuç:

$$\binom{k-2}{2}\binom{n - 3 - 2(k-4) + k - 4 - 1}{k-2} = \binom{k-2}{2}\binom{n-k}{k-5}.$$