Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

Ayın Sorusu

Aralık 2017

Soru:

$a_1 a_2 \cdots a_{2017} = 1$ koşulunu sağlayan tüm $a_1, a_2, \ldots, a_{2017}$ pozitif gerçel sayıları için

$$\sum_{i=1}^{2017} \frac{a_i}{1+a_i} \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2017} \frac{1}{a_i}$$

eşitsizliğini kanıtlayınız.

Çözüm:

$f(a_1, a_2, \ldots, a_k) = \dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{a_i} - \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{1+a_i}$ olsun. $a_1 a_2 \cdots a_k = 1$ koşulunu sağlayan tüm $a_1, a_2, \ldots, a_k$ pozitif gerçel sayıları için k üzerinden tümevarımla $f_k(a_1, a_2, \ldots, a_k) \geq 0$ eşitsizliğini kanıtlayacağız.

$k = 1$ ise $a_1 = 1$ ve $f_1(a_1) = 0$.

$k > 1$ ve $a_1 a_2 \cdots a_k = 1$ olsun. Genelliği bozmadan $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_k$ kabul edelim.

$$f(a_1, a_2, \ldots, a_k) - f_{k-1}(a_1 a_k, a_2, \ldots, a_{k-1}) = \frac{1}{2a_1} - \frac{a_1}{1+a_1} + \frac{1}{2a_k} - \frac{a_k}{1+a_k} - \left(\frac{1}{2a_1 a_k} - \frac{a_1 a_k}{1+a_1 a_k}\right) \geq 0 \qquad (1)$$

olduğunu gösterelim. Ortak payda kullanırsak (1)

$$(1-a_1)(a_k-1)(2a_1^2 a_k^2 + a_1^2 a_k + a_1 a_k^2 + a_1 a_k + a_1 + a_k + 1) \geq 0$$

gibi yazılabilir. Son eşitsizlik de $0 < a_1 \leq 1 \leq a_k$ olduğundan doğrudur. Şimdi tümevarım varsayımından

$$f(a_1, a_2, \ldots, a_k) \geq f_{k-1}(a_1 a_k, a_2, \ldots, a_{k-1}) \geq 0$$

elde ediyoruz.